

静止している流体

流体の密度が一定で速度が 0 のときの簡単な例をいくつか見ていきます。最後に密度が変化する例も簡単に見ています

運動量方程式は

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

ρ は流体の密度、 v_i は流体の速度ベクトル、 f_i は単位質量あたりの体積力、 σ_{ij} は応力テンソルです。これを密度が一定、速度が 0 とした式に変えます。「ナビエ・ストークス方程式」の最初に触れたように、静止しているときの応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} \quad (1)$$

P は圧力です。もしくは、ニュートン流体での応力テンソル

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

において (μ は粘性率、 λ は第二粘性率)、速度を 0 にした場合とも言えます。このように流体が静止しているとき、流体内の点には全ての方向に同じ圧力が作用します。これはパスカル (Pascal) の原理です。

速度を 0 として、応力テンソル (1) を入れれば、運動量方程式は

$$\nabla P = \rho \mathbf{f} \quad (2)$$

となり、密度が一定の流体が静止しているときの方程式となります。また、密度が一定の流体は非圧縮性流体 (incompressible fluid) と呼ばれます。非圧縮は密度の変化がないために、圧縮が起きないことからです (圧力が作用しても密度が変わらない)。(2) の回転を取ると、 $\nabla \times \nabla P = 0$ から

$$\nabla \times \mathbf{f} = 0$$

これは保存力の定義そのものなので、非圧縮性流体が静止しているためには作用している力 (体積力) が保存力である必要があります。

体積力を重力として見ていきます。 x_1, x_2, x_3 軸によるデカルト座標とし、 x_3 の負の方向に重力が作用しているとします。なので、重力加速度を g として

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g$$

x_1, x_2 での偏微分で 0 になるので x_1, x_2 方向での圧力は定数です。なので、 P には x_1, x_2 の依存性がなく $P(x_3)$ です。そして、 ρ は定数なので

$$P(x_3) = -\rho g x_3 + c \quad (3)$$

と求めます。 c は定数です。流体の底面が x_1x_2 平面にあり($x_3 = 0$)、 $x_3 = h$ に流体の上面があるとし、境界条件として $x_3 = h$ での圧力を P_0 とします。この条件によって

$$P(x_3) = P_0 - \rho g x_3 + \rho g h = P_0 + \rho g(h - x_3) \quad (4)$$

これから分かるように、流体内の圧力は流体の高さとその内部の高さの差(流体の深さ)で決まります。 $x_3 = 0$ の底面での圧力は

$$P(0) - P_0 = \rho g h$$

となるように、圧力は流体の深さに依存しています。そして、このとき流体の形については何も言っていません。流体の深さのみに圧力が依存する性質は水の配管等に利用されています。

また、(3)を変形すると

$$P(x_3) + \rho g x_3 = c$$

となり、圧力 P と $\rho g x_3$ の和は流体の任意の地点において保存していると言えます。

この結果はもっと単純に求めることもできます。静止しているので、流体内において力が釣り合っているとします。そうすると、流体内の適当な微小な直方体の領域において上方向から圧力 $P(x_3)$ 、下方向から圧力 $P(0)$ が作用しています。直方体の底面を $x_3 = 0$ にしています。ここに重力が作用し、それによって釣り合っているなら

$$P(x_3)\Delta A + \rho g \Delta V = P(0)\Delta A$$

$$(P(x_3) - P(0))\Delta A = -\rho g \Delta V$$

ΔA は直方体の底面の面積、 ΔV は直方体の体積です。これから、圧力の差が微小として積分にすれば

$$\Delta P = -\rho g \Delta x_3 \quad (\Delta V = \Delta A \Delta x_3 = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)$$

$$\int dP = -\rho g \int dx_3$$

$$P(x_3) = -\rho g x_3 + c$$

となります。

流体に加速度が作用している場合では、加速度の項が加わります。加速度があると速度が0でなくなりますが、流体全体が同じように動き(流体粒子の運動に差がない)、ある形で固定されるなら、それは静止しているのと同じです。言い換えれば、剛体と同じような状況になっている場合です。このときは加速度 $\mathbf{a}$ による寄与が加わることになり

$$\nabla P = \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{a} \quad (5)$$

となります。 f に合わせるために質量でなく密度を使っています。

外部から直線的に加速度が加わる場合を求めます。流体と言っていますが、液体と思った方が想像しやすいです。例えば、水の入っている水槽を載せている車が x_2 方向に一定の加速度 a で動いているとき、水に $-x_2$ 方向に慣性力が加わり、水槽内で水の形は力が加わっていないときとは別の形に固定されます。このときの静止した状態 (流体の上面) がどうなっているのかを求めます。

x_2 方向に $-\rho a$ が均一に加わるので、運動量方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\rho a, \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g$$

x_1 の偏微分が 0 なので $P(x_2, x_3)$ となり、 x_2, x_3 の式を常微分として積分すると

$$P^{(x_2)} = -\rho a x_2 + c_2, \quad P^{(x_3)} = -\rho g x_3 + c_3$$

c_2, c_3 は定数です。 $P^{(x_2)} = P^{(x_3)}$ とするには定数を

$$c_2(x_3) = -\rho g x_3, \quad c_3(x_2) = -\rho a x_2$$

という関数に置き換えれば一致させられるので

$$P(x_2, x_3) = -\rho a x_2 - \rho g x_3 + c = -\rho(a x_2 + g x_3) + c$$

c は定数です。境界条件を与えるために、 x_2 軸を横、 x_3 軸を縦とする $x_2 x_3$ 平面での原点を流体の左下の位置とします (x_1 軸は奥行き、 x_3 軸が高さ)。条件として、 $x_2 = 0$ のとき流体の高さが $x_3 = z_0$ になっており、この流体の上面に圧力 P_0 が作用しているとすれば

$$P_0 = -\rho g z_0 + c$$

$$c = P_0 + \rho g z_0$$

なので

$$P(x_2, x_3) = -\rho(a x_2 + g x_3) + P_0 + \rho g z_0 = P_0 - \rho(a x_2 - g z_0 + g x_3) \quad (6)$$

流体の上面がどうなっているのか知りたいので、 x_3 の式にすれば

$$x_3 = \frac{1}{\rho g} (P_0 - P(x_2, x_3)) - \frac{a}{g} x_2 + z_0$$

流体に作用している力は位置に依存してなく ($x_2 x_3$ 平面の傾き g/a の直線方向に作用している)、流体の形が一定になっていることから、流体の上面には同じ圧力 P_0 が作用します (上面の接線方向に力が作用していない)。なので、上面の位置は

$$x_3 = -\frac{a}{g}x_2 + z_0 \quad (x_3(0) = z_0) \quad (7)$$

と与えられ、上面は $x_2 = 0$ から直線的に減少していつているのが分かります (角度は傾きから $\tan \theta = -a/g$)。また、流体内の点 (x_2, x_3) の上面からの深さは

$$-\frac{a}{g}x_2 + z_0 - x_3$$

となっており、これは (6) を

$$P(x_2, x_3) - P_0 = \rho g \left(-\frac{a}{g}x_2 + z_0 - x_3 \right)$$

と書いたときの右辺なので、流体内の圧力は深さのみに依存しています。

加速度が作用していないときの流体は直方体になっているとして、その高さを求めます。流体は $0 \leq x_2 \leq l$ の範囲に入っているとすれば、加速度が作用しているとき $x_2 x_3$ 平面において台形になっています。その面積は (7) から

$$\frac{l}{2}(x_3(0) + x_3(l)) = \frac{l}{2}\left(z_0 - \frac{a}{g}l + z_0\right) = z_0 l - \frac{a}{2g}l^2$$

流体の体積は変化しないので (x_1 方向の長さは変化しない)、横が l の長方形の縦は $z_0 - al/2g$ と求まり、これが直方体のときの流体の高さとなります。この高さは $x_2 = l/2$ のときなので、加速度が作用すると流体の真ん中を中心に傾いていくという予想通りの結果です。

回転による加速度が作用している例として、流体が入っている円筒を回転させた場合を求めます。円筒の回転によって円筒内の流体は円筒の回転と同じように動き (流体粒子の動きに差がない)、形は固定されるとします。

半径 r の円を回転の中心を $r = 0$ として一定の角速度 ω で回転させたとき、この円の上に乗っている質点は向心力とは逆方向の力 (遠心力) を受けます。なので、円筒座標 (r, θ, z) を使うと、質量 m の質点に対して r 方向に $mr\omega^2$ 、 z 方向に $-mg$ の力が発生します。これらを (5) に入れば

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

P は θ に依存してなく、 $P(r, z)$ となります。これもそれぞれ積分してみれば

$$P^{(r)} = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 + c_r, \quad P^{(z)} = -\rho g z + c_z$$

積分定数 c_r, c_z を関数として

$$c_r = -\rho g z, \quad c_z = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$$

とすれば一致するので

$$P(r, z) = \rho \left(\frac{1}{2}r^2 \omega^2 - g z \right) + c$$

c は定数です。境界条件を $r = 0, z = z_0$ での圧力が $P(0, z_0) = P_0$ になっているとして

$$P_0 = -\rho g z_0 + c$$

$$c = P_0 + \rho g z_0$$

これを入れれば、圧力は

$$P(r, z) = P_0 + \rho \left(\frac{1}{2} r^2 \omega^2 - g(z - z_0) \right)$$

上面を知りたいので $P(r, z) = P_0$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r^2 \omega^2 - g(z - z_0) &= 0 \\ z(r) &= \frac{1}{2g} r^2 \omega^2 + z_0 \end{aligned} \tag{8}$$

z_0 は $r = 0$ の高さ $z(0)$ なので、円筒の外側に行くほど流体の高さは大きくなり、円筒の端 $r = R$ では

$$z(R) = \frac{1}{2g} R^2 \omega^2 + z(0)$$

となります。

回転前の流体の高さを求めます。回転前では高さ h の円筒の形になっているとします。円筒の体積を r 積分から求めようとするなら、円周 $2\pi r$ と高さ z の積に微小な幅 Δr をかけて、0 から R で積分すれば求まります。この z を (8) での $z(r)$ に置き換えれば、回転後の体積になるので

$$V = \int_0^R dr \, 2\pi r z(r) = 2\pi \int_0^R dr \left(\frac{1}{2g} \omega^2 r^3 + z_0 r \right) = \frac{\pi}{4g} \omega^2 R^4 + \pi R^2 z_0$$

回転前での体積は

$$V = \pi R^2 h$$

なので、体積は変化しないことから

$$\pi R^2 h = \pi R^2 z(0) + \frac{\pi}{4g} \omega^2 R^4$$

$$h = z(0) + \frac{1}{4g} \omega^2 R^2$$

と求まります。回転前の高さ h を使うと、回転後の最も低い $z(0)$ と最も高い $z(R)$ は

$$z(0) = h - \frac{1}{4g} \omega^2 R^2$$

$$z(R) = \frac{1}{2g} \omega^2 R^2 + z(0) = \frac{1}{2g} \omega^2 R^2 + h - \frac{1}{4g} \omega^2 R^2 = h + \frac{1}{4g} \omega^2 R^2$$

と書けます。これらを見れば分かるように、回転前の高さは $z(0)$ と $z(R)$ の中間の値になっています。

静止している流体の中に物体がある場合を見ていきます。物体を直方体とし、物体の上面から h_1 の位置に直方体の上面があるとします。そうすると、直方体の上面の面積を A とし、重力のみが作用しているとすれば、上面に作用している力は $|F_1| = gh_1\rho A$ です (ρ は流体の密度)。同様に、流体の上面から直方体の下面までが h_2 であるなら、直方体の下面に作用している力は $|F_2| = gh_2\rho A$ です。これらの和が直方体の上下に作用しているので、下方向を負に取れば

$$F_b = F_1 + F_2 = -gh_1\rho A + gh_2\rho A = g\rho A(h_2 - h_1) = g\rho V \quad (9)$$

$h_2 - h_1$ は直方体の高さなので $V = A(h_2 - h_1)$ は直方体の体積ですが、言い換えれば直方体によってどかされた流体の体積とも言えます。なので、流体中の物体には、その物体によってどかされた流体の質量 ρV による力が作用します。力 F_b を浮力 (buoyancy) と呼び、これはアルキメデス (Archimedes) の原理そのものです。

直方体でない形に対しても同じ結果になります。物体を $\mathcal{V}$ とし、その表面を $\mathcal{S}$ とし、表面の外向きの単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とします。流体が静止しているとき応力は面の法線方向にしか作用しなく、 $-P\mathbf{n}$ です (「ナビエ・ストークス方程式」参照)。これが $\mathcal{S}$ の微小な面 ΔS に作用しているときの力は $\Delta \mathbf{F} = -P\mathbf{n}\Delta S$ なので、物体に作用している力は面積分によって

$$\mathbf{F} = - \int_{\mathcal{S}} dS P \mathbf{n}$$

x_1, x_2, x_3 軸と $\mathbf{n}$ との間の角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすれば

$$P\mathbf{n} = P(\mathbf{e}_1 \cos \theta_1 + \mathbf{e}_2 \cos \theta_2 + \mathbf{e}_3 \cos \theta_3)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は x_1, x_2, x_3 方向の単位ベクトルです。これから

$$- \int_{\mathcal{S}} dS P \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1 \int_{\mathcal{S}} dS P \cos \theta_1 - \mathbf{e}_2 \int_{\mathcal{S}} dS P \cos \theta_2 - \mathbf{e}_3 \int_{\mathcal{S}} dS P \cos \theta_3$$

ベクトル $\mathbf{A}$ に対するガウスの発散定理は

$$\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \int_{\mathcal{S}} dS (A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2 + A_3 \cos \theta_3) = \int_{\mathcal{V}} dV \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)$$

$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 = (A, 0, 0)$ に対しては

$$\int_{\mathcal{S}} dS A \cos \theta_1 = \int_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial A}{\partial x_1}$$

他の成分も同様なので

$$- \int_{\mathcal{S}} dS P \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1 \int_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial P}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \int_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial P}{\partial x_2} - \mathbf{e}_3 \int_{\mathcal{V}} dV \frac{\partial P}{\partial x_3} = - \int_{\mathcal{V}} dV \nabla P$$

x_3 軸の下方向に重力が作用しているとして (2) から

$$\mathbf{F} = - \int_S dS P \mathbf{n} = - \int_V dV \nabla P = - \rho \int_V dV \mathbf{f} = \mathbf{e}_3 g \rho \int_V dV = g \rho V \mathbf{e}_3$$

よって、流体の体積 ρV による力が x_3 軸の上方向に作用します。

最後に、密度が一定でない例として理想気体の場合を簡単に見ていきます。理想気体の状態方程式は

$$P = \rho RT$$

と与えられます。 R は気体定数、 T は温度です。この場合では速度が 0 でも圧力と温度の変化で ρ は変化します。これを (2) の密度に入れると

$$\nabla P = \frac{P}{RT} \mathbf{f}$$

x_3 軸の負の方向に重力が作用しているとすれば

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{g}{RT} P \quad (10)$$

これを地球の大気に適用してみます。単純に解くなら、地上を $x_3 = 0$ 、高さを $x_3 = h$ として積分することで

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} &= -\frac{g}{RT} \int_0^h dx_3 \\ \log P - \log P_0 &= -\frac{g}{RT} h \\ P &= P_0 \exp\left[-\frac{g}{RT} h\right] \end{aligned}$$

地上 (海面) の圧力を P_0 としています。しかし、これは高さ h が地球の半径に比べて十分小さいときです。

重力加速度は、 G を重力定数、質点の質量を m 、地球の質量を M_e 、地球の半径を r_e として

$$g = G \frac{m M_e}{r_e^2}$$

と定義されていますが、地球の中心から $r = r_e + h$ にいる質点に作用する力は万有引力の法則から

$$G \frac{m M_e}{r^2} = G \frac{m M_e}{(r_e + h)^2} = G \frac{m M_e}{r_e^2} \frac{1}{(1 + h/r_e)^2} = g \frac{1}{(1 + h/r_e)^2} = g'$$

なので、地上付近だけでなく、より高い位置まで考えるなら (10) での g を g' に置き換えて

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\frac{g'(x_3)}{RT} P \quad (g'(x_3) = \frac{g}{(1 + x_3/r_e)^2})$$

さらに、上空に行くほど温度は下がるので、それを

$$T(x_3) = T_0 - ax_3 = T_0(1 - \alpha x_3) \quad (\alpha = \frac{a}{T_0})$$

と仮定し、 x_3 の 1 次関数として減少させます。 T_0 は地上の温度、 a, α は定数です。これらによって

$$P = c \exp\left[-\frac{1}{R} \int dx_3 \frac{g'(x_3)}{T(x_3)}\right] = c \exp\left[-\frac{g}{RT_0} \int dx_3 \frac{1}{(1 - \alpha x_3)(1 + x_3/r_e)^2}\right]$$

積分を近似して行います。温度は緩やかに変化しているなら αx_3 は十分小さく、地球の大気圏は r_e より小さいです。なので、 $\alpha x_3, x_3/r_e$ の 1 次までで近似すると

$$\frac{1}{(1 - \alpha x_3)(1 + x_3/r_e)^2} \simeq (1 + \alpha x_3)(1 - \frac{2x_3}{r_e}) = 1 + (\alpha - \frac{2}{r_e})x_3 - \frac{2\alpha}{r_e}x_3^2$$

この 1 次までを使うことにして、地上からの高さ h までの範囲で積分すれば

$$\int_0^h dx_3 (1 + (\alpha - \frac{2}{r_e})x_3) = h + \frac{1}{2}(\alpha - \frac{2}{r_e})h^2$$

よって、圧力は

$$P = c \exp\left[-\frac{gh}{RT_0} \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha - \frac{2}{r_e})h\right)\right]$$

地上 ($h = 0$) の圧力を P_0 とすれば

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{gh}{RT_0} \left(1 + \frac{h}{2}(\alpha - \frac{2}{r_e})\right)\right]$$

この結果は大気の圧力に対して良い近似を与えます (α は実験から決める)。

理想気体による浮力を近似的に求めます。上で求めた浮力は液体のように密度一定の場合でしたが、理想気体では密度が変化するので、それによる項が出てきます。

地上付近とし、重力加速度 g と定数の温度によって

$$P(x_3) = P_0 \exp[-\lambda g x_3] \quad (\lambda = \frac{1}{RT})$$

とした場合を使います。このときの密度は

$$\rho(x_3) = \frac{P(x_3)}{RT} = \lambda P_0 \exp[-\lambda g x_3]$$

物体を体積 $\Delta V = h\Delta A$ とする微小な直方体とすれば、その上面と下面に作用する力は

$$P(x_3 + h)\Delta A, P(x_3)\Delta A$$

このときの浮力 ΔF_b は

$$\Delta F_b = P(x_3)\Delta A - P(x_3 + h)\Delta A$$

圧力の差は

$$P(x_3) - P(x_3 + h) = P_0(e^{-g\lambda x_3} - e^{-g\lambda(x_3+h)}) = P_0e^{-g\lambda x_3}(1 - e^{-g\lambda h})$$

h は微小なので

$$\begin{aligned} P(x_3) - P(x_3 + h) &\simeq P_0e^{-g\lambda x_3}(g\lambda h - \frac{1}{2}(g\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(g\lambda h)^3 - \dots) \\ &= g\lambda P_0e^{-g\lambda x_3}(h - \frac{1}{2}g\lambda h^2 + \frac{1}{6}(g\lambda)^2 h^3 - \dots) \\ &= g\rho(x_3)(h - \frac{1}{2}g\lambda h^2 + \frac{1}{6}(g\lambda)^2 h^3 - \dots) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta F_b &\simeq g\rho(x_3)(\Delta V - \frac{g\lambda\Delta A}{2}h^2 + \frac{(g\lambda)^2\Delta A}{6}h^3 - \dots) \\ &= g\rho(x_3)(\Delta V - \frac{1}{2}\frac{g\Delta A}{RT}h^2 + \frac{1}{6}\frac{g^2\Delta A}{(RT)^2}h^3 - \dots) \end{aligned}$$

有限の物体にするなら、これを足し合わせていけばいいです。第1項だけを取り出して、密度を定数とすれば(9)と一致します。