

ストークス方程式

ナビエ・ストークス方程式は解けないので、線形になるように近似したストークス方程式の解を求めます。最初に流れ関数を定義しています。

流れ関数 (stream function) から見ていきます。渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ はデカルト座標 (x_1, x_2, x_3) において

$$\omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \quad \omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

x_1, x_2 による 2 次元なら ω_3 のみが 0 でないので

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (1)$$

となる関数 $\psi(x_1, x_2, t)$ があるとします。 ψ を使うと ω_3 は

$$\omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\nabla^2 \psi$$

そして

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

となっており、2 次元での $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0)$ での発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

と同じになっています。つまり、(1) となる関数 ψ がいることは 2 次元での非圧縮性流体の条件を与えます。この ψ を流れ関数と言います。

流れ関数は流線上では定数になっています。ある時間での 2 次元での流線を表す曲線があり (流線は接ベクトルが速度ベクトルの曲線)、その曲線のパラメータを s とすれば、曲線上の位置は $x_1(s), x_2(s)$ なので

$$\frac{d}{ds} \psi(x_1(s), x_2(s)) = \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

$dx_1/ds, dx_2/ds$ は流線の変化、つまり速度なので流線上の関係として

$$\frac{dx_1}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \right)$$

よって、流線上において流れ関数は定数です。もしくは、ある時間での $\psi(x, y) = \text{const}$ を曲線の式と見れば、その曲線の法線ベクトル $\nabla \psi$ と $\boldsymbol{v}$ の内積は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = v_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$$

これから法線ベクトルと $\mathbf{v}$ が直交することが分かり、曲線において法線ベクトルと直交するのは接ベクトルなので (数学の「ベクトルの微分、積分」参照)、 $\psi(x, y, t_0) = \text{const}$ の曲線は $\mathbf{v}$ を接ベクトルとする流線となります。

ストークス (Stokes) 方程式を作ります。ナビエ・ストークス方程式は

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla P + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu (\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}))$$

ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は単位質量あたりの体積力、 P は圧力、 $\mathbf{v}$ は速度、 μ は粘性、 λ は第二粘性率です。体積力 $\mathbf{f}$ は作用していないとし、定常流として時間微分をなくせば

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu (\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}))$$

非圧縮性流体として $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を加えれば

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla P \quad (2)$$

さらに左辺の第 1 項を無視して

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla P \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$$

としたものをストークス方程式と言い、線形方程式になっています。ストークス方程式に従う流体の流れはストークス流 (Stokes flow) や creeping flow と呼ばれます。

(2) の第 1 項を無視する意味を見ておきます。そのために、レイノルド数 (Reynolds number) を与えます。(2) において流体の特徴は $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ と $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ で与えられていると言えます。なので、この 2 つの項の大小関係で流体の振る舞いは変わります。この大小関係を見積るために、適当な速度を V 、長さを L として

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &\Rightarrow \frac{V^2}{L} \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v} &\Rightarrow \mu \frac{V}{L^2} \end{aligned}$$

と書けば、これらの割合は

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}{\mu \nabla^2 \mathbf{v}} \Rightarrow Re = \frac{VL}{\mu}$$

Re をレイノルズ数と言い、無次元量です。このように、 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ の項を無視することはレイノルド数が小さい場合 ($Re < 1$) に対応し、速度が十分遅い場合と言えます。もしくは、粘性の項からの寄与が大きい場合とも言えます。

ストークス方程式での一様な流体が球体に向かっていく場合の解を求めます。座標軸の原点は球の中心に取り、極座標 (r, θ, ϕ) を使います。一様な流体が球に向かって流れきているなら、球を中心にした対称な流れになっていると考えられます。そうすると、 x_3 軸 ($\theta = 0$) を流体の動きが x_3 軸に対して対称になるように取れば (x_3 軸に

沿って一様に流体が球に流れてきている)、極座標において ϕ の依存性をなくせて、2次元として扱えます (ある θ に対して ϕ の 0 から 2π で作られる円周上で流体の動きは同じ)。このように座標軸を設定したとして、速度ベクトルを $\mathbf{v} = (v_r(r, \theta), v_\theta(r, \theta), 0)$ とします。

ストークス方程式を変形します。ベクトルの関係

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

から

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla^2 \mathbf{v}$$

このことから渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ を導入すれば

$$\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla P \quad (3)$$

さらに、スカラー S に対して $\nabla \times (\nabla S) = 0$ なので

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

これを解きます。

2次元では流れ関数 ψ があるので、 $\mathbf{v}$ を流れ関数で書きます。発散は極座標では

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\phi$$

ϕ の依存性はなく、非圧縮性流体の速度ベクトルの発散は 0 なので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \\ &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta r \sin \theta) \end{aligned}$$

流れ関数の定義に対応させるには

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \psi = v_r r^2 \sin \theta, \quad \frac{\partial}{\partial r} \psi = v_\theta r \sin \theta$$

とすればいいので

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

そうすると、極座標での回転

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

を使えば、渦度ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= \mathbf{e}_\phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\ &= \mathbf{e}_\phi \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right) \\ &= \mathbf{e}_\phi \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \psi \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \Psi \end{aligned} \tag{5}$$

さらに2回行えばいいですが、別の方法で求めます。

そのためにベクトルの関係

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

から

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{h}$$

となる $\mathbf{h}$ を求めます。 $\nabla \times \mathbf{h} = (v_r, v_\theta, 0)$ とするために $\mathbf{h}$ は ϕ 成分だけを持つとします。このときの F_ϕ は

$$\begin{aligned} v_r &= (\nabla \times (h_\phi \mathbf{e}_\phi))_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\phi \sin \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= (\nabla \times (h_\phi \mathbf{e}_\phi))_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_\phi) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

となればいいので、 $h_\phi = \psi / r \sin \theta$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\phi \sin \theta) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_\phi) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\psi}{\sin \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

として、一致します。

というわけで

$$\mathbf{v} = \nabla \times (h_\phi \mathbf{e}_\phi) = \nabla \times \left(\frac{\psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

このようにすると

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \psi$$

から

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= -\nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \\ &= \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \Psi \\ &= \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \psi \\ &= \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi \end{aligned}$$

よって、(4) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi = 0 \quad (6)$$

となり、 ψ が求まればストークス方程式を解いたことになります。

境界条件を与えます。無限遠では一様な速度 V_0 、圧力 P_0 になっており、半径 a の球の表面では流体が滑ってないとして表面での速度を 0 にします。なので、境界条件として

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 \quad (r = a) \\ v_3 &= V_0, \quad P = P_0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (7)$$

流体は x_3 軸方向に流れているとしてるので、 v_3 に条件を与えています。 x_3 軸方向の基底 $\mathbf{e}_3$ は

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta$$

なので、 v_3 の条件は極座標では

$$v_3 \mathbf{e}_3 = V_0 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r V_0 \cos \theta - \mathbf{e}_\theta V_0 \sin \theta \Rightarrow v_r = V_0 \cos \theta, \quad v_\theta = -V_0 \sin \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

となります。流れ関数を使うなら

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} v_r &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_0 \cos \theta \\ \lim_{r \rightarrow \infty} v_\theta &= -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (8)$$

と書けます。

解の形として $\psi(r, \theta)$ の r と θ の依存性が分離していると仮定して、 $\psi(r, \theta) = A(r)B(\theta)$ とします。そうすると、(7) を満たすには、 $B(\theta)$ は $\sin^2 \theta$ の形でないといけなないと分かります。なので、

$$\psi(r, \theta) = A(r) \sin^2 \theta$$

とすれば、(6) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) A(r) \sin^2 \theta &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{A}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$A(r)$ なので常微分になっていますが、偏微分のままで書いています。もう 1 度作用させて

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 A \end{aligned}$$

よって

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 A = 0$$

左辺は展開すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - 2 \frac{A}{r^2} \right) \\ &= \frac{\partial^4 A}{\partial r^4} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4}{r^3} A - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} A \\ &= \frac{\partial^4 A}{\partial r^4} - \frac{12}{r^4} A + \frac{4}{r^3} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} A \\ &= \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{8}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{8}{r^4} \right) A \end{aligned}$$

となり、4 階線形微分方程式です。

一般解を求めるために、全ての項の分母に r が 4 個現れる形になっていることから、解として r^λ を仮定します。これを入れれば

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)r^\lambda \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right)r^{\lambda-2}(\lambda(\lambda-1)-2) \\
&= r^{\lambda-4}((\lambda-2)(\lambda-3)-2)(\lambda(\lambda-1)-2) \\
&= (\lambda^2-5\lambda+4)(\lambda^2-\lambda-2) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+1) \\
&= (\lambda^2-1)(\lambda-4)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

となり、 $\lambda = -1, 1, 2, 4$ と求まります。4 階線形微分方程式なので、一般解はこれらの線形結合によって

$$A(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r + c_3 r^2 + c_4 r^4$$

c_1, c_2, c_3, c_4 は任意定数です。これで $\psi = A(r)B(\theta)$ が求まり、流れ関数と速度の成分は

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta) &= \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r + c_3 r^2 + c_4 r^4\right) \sin^2 \theta \\
v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2\left(\frac{c_1}{r^3} + \frac{c_2}{r} + c_3 + c_4 r^2\right) \cos \theta \\
v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{c_1}{r^3} - \frac{c_2}{r} - 2c_3 - 4c_4 r^2\right) \sin \theta
\end{aligned}$$

$r \rightarrow \infty$ での境界条件から c_3, c_4 は決まります。 $r \rightarrow \infty$ で速度は無限大でない定数としているので r^2 の係数 c_4 は 0、 v_r, v_θ は $V_0 \cos \theta, -V_0 \sin \theta$ なので $c_3 = V_0/2$ です。 $r = a$ で速度が 0 の条件からは

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2\left(\frac{c_1}{a^3} + \frac{c_2}{a} + \frac{V_0}{2}\right) \cos \theta = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 a^2 + \frac{V_0}{2} a^3 = 0 \\
v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{c_1}{a^3} - \frac{c_2}{a} - V_0\right) \sin \theta = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 a^2 - V_0 a^3 = 0
\end{aligned}$$

これらから

$$c_1 = \frac{1}{4} V_0 a^3, \quad c_2 = -\frac{3}{4} V_0 a$$

よって、境界条件 (7) を満たすストークス方程式の解は

$$\psi(r, \theta) = V_0 \left(\frac{1}{4} \frac{a^3}{r} - \frac{3}{4} a r + \frac{1}{2} r^2 \right) \sin^2 \theta \quad (9a)$$

$$v_r = V_0 \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta \quad (9b)$$

$$v_\theta = -V_0 \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \quad (9c)$$

となります。

圧力を求めます。圧力は (3),(5) から

$$\begin{aligned}
\nabla P &= -\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \\
&= -\mu \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} \\
&= \mu \nabla \times (\boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta})) \psi
\end{aligned}$$

(9a) を入れれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi &= V_0 (\frac{a^3}{2} \frac{1}{r^3} + 1) \sin^2 \theta = V_0 \alpha \sin^2 \theta \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi &= V_0 (\frac{a^3}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{3a}{2} \frac{1}{r} + 1) \cos^2 \theta - V_0 (\frac{a^3}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{3a}{2} \frac{1}{r} + 1) \sin^2 \theta = V_0 (\alpha - \frac{3a}{2} \frac{1}{r}) \cos^2 \theta - V_0 (\alpha - \frac{3a}{2} \frac{1}{r}) \sin^2 \theta \\
\frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi &= 2V_0 (\frac{a^3}{4} \frac{1}{r^3} - \frac{3a}{4} \frac{1}{r} + \frac{1}{2}) \cos^2 \theta = V_0 (\alpha - \frac{3a}{2} \frac{1}{r}) \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}) \psi \\
&= V_0 \alpha \sin^2 \theta + V_0 (\alpha - \frac{3a}{4} \frac{1}{r}) \cos^2 \theta - V_0 (\alpha - \frac{3a}{4} \frac{1}{r}) \sin^2 \theta - V_0 (\alpha - \frac{3a}{4} \frac{1}{r}) \cos^2 \theta \\
&= \frac{3V_0 a}{2} \frac{1}{r} \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
\mu \nabla \times (\boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta})) \psi &= \frac{3V_0 \mu a}{2} \nabla \times (\boldsymbol{e}_\phi \frac{\sin \theta}{r^2}) \\
&= \frac{3V_0 \mu a}{2} (\boldsymbol{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin \theta}{r}) \\
&= \boldsymbol{e}_r \frac{3V_0 \mu a}{r^3} \cos \theta + \boldsymbol{e}_\theta \frac{3V_0 \mu a}{2r^3} \sin \theta
\end{aligned}$$

そして、 ∇P は

$$\nabla P = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial P}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

なので

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{3V_0 \mu a}{r^3} \cos \theta, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3V_0 \mu a}{2r^2} \sin \theta$$

これは単純に両方とも常微分と思って積分すれば

$$P^{(r)} = -\frac{3V_0\mu a}{2r^2} \cos \theta + c, \quad P^{(\theta)} = -\frac{3V_0\mu a}{2r^2} \cos \theta + c$$

c は積分定数です。どちらも同じなので、これが解になります。そして、境界条件は無限遠での圧力を P_0 としているので、積分定数は P_0 です。よって

$$P = -\frac{3V_0\mu a}{2r^2} \cos \theta + P_0$$

となります。

圧力が分かったので球体が受ける力を求めます。 x_3 軸方向に流体は向かっていくとしているので、 x_3 軸方向の力を考えます。

ニュートン流体での応力テンソル σ_{ij} は圧力と変形速度テンソル e_{ij} によって

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}))$$

今は第二粘性率の項は考えていないので省いています。法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする面に作用する応力ベクトル (単位面積あたりの面積力) $\mathbf{p}$ と応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

ストークス方程式の解は極座標で求めたので、極座標で書きます。球面上の単位法線ベクトルは $\mathbf{e}_r$ なので

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_r = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \delta_{jr} = \sigma_{ir} \mathbf{e}_i = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta r} \mathbf{e}_\theta$$

この $\mathbf{e}_i$ は極座標の基底で、添え字は r, θ, ϕ としています。今はこの x_3 方向を取り出したいので、 $\mathbf{e}_r$ 方向の σ_{rr} には $\cos \theta$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 方向の $\sigma_{\theta r}$ には $-\sin \theta$ をかけることで

$$p_3 = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta$$

となります。

極座標での変形速度テンソルは連続体の力学の「ひずみテンソル」で求めています

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta)$$

これを球面上にしたいので、 $r = a$ として求めると

$$e_{rr}|_{r=a} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = V_0(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4}) \cos \theta|_{r=a} = V_0 \frac{1}{a}(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}) \cos \theta = 0$$

$e_{r\theta}$ は

$$\begin{aligned}
e_{r\theta}|_{r=a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta \right) \Big|_{r=a} \\
&= \frac{1}{2} V_0 \left(-\frac{3a}{4r^2} - \frac{3a^3}{4r^4} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \right) \sin \theta \Big|_{r=a} \\
&= \frac{1}{2} V_0 \frac{1}{r} \left(-\frac{3a}{4r} - \frac{3a^3}{4r^3} - 1 + \frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} + 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \Big|_{r=a} \\
&= -\frac{3V_0 a^3}{4} \frac{1}{r^4} \sin \theta \Big|_{r=a} \\
&= -\frac{3V_0}{4a} \sin \theta
\end{aligned}$$

また、 $e_{\theta\theta}$ は

$$\begin{aligned}
e_{\theta\theta}|_{r=a} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \Big|_{r=a} = -\frac{V_0}{r} \left(\left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) - \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \right) \cos \theta \Big|_{r=a} \\
&= -\frac{V_0}{r} \left(\frac{3a}{4r} - \frac{3a^3}{4r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=a} \\
&= -\frac{V_0}{r} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$e_{\phi\phi}$ は

$$\begin{aligned}
e_{\phi\phi}|_{r=a} &= \frac{1}{r \sin \theta} (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \Big|_{r=a} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} V_0 \left(-\frac{3a}{4r} + \frac{3a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \Big|_{r=a} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} V_0 \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) \sin \theta \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$e_{r\phi}, e_{\theta\phi}$ は $v_\phi = 0$ と ϕ の依存性がないことから 0 になっています。

というわけで、応力テンソルの成分は

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -P(r=a) = \frac{3V_0\mu}{2a} \cos \theta - P_0 \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu e_{r\theta} = -\frac{3V_0\mu}{2a} \sin \theta
\end{aligned}$$

これらが半径 a の球にわたって作用しているので

$$\begin{aligned}
F_3 &= \int_0^a dr \, r \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \, p_3 \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta \, p_3 \sin \theta \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta) \sin \theta \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta \left(\left(\frac{3V_0\mu}{2a} \cos \theta - P_0 \right) \cos \theta + \frac{3V_0\mu}{2a} \sin^2 \theta \right) \sin \theta \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi d\theta \left(\frac{3V_0\mu}{2a} - P_0 \cos \theta \right) \sin \theta \quad \left(\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi = 0 \right) \\
&= 2\pi a^2 \frac{3V_0\mu}{2a} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\
&= 6\pi V_0\mu a
\end{aligned}$$

球体に作用する力がこのようになることをストークスの公式と言います。この力は言い換えれば、非圧縮性流体の中を動いている球体が受ける抵抗力（抗力、drag force）です。

F_3 から

$$C_D = \frac{F_3}{\rho V_0^2 S/2} \quad (S = \pi a^2)$$

とした無次元量を抵抗係数（抗力係数、drag coefficient）と言います。レイノルド数を

$$Re = \frac{\rho V_0 a}{2\mu}$$

として

$$C_D = \frac{F_3}{\rho V_0^2 S/2} = \frac{6\pi V_0\mu a}{\rho V_0^2 \pi a^2/2} = \frac{12\mu}{\rho V_0 a} = \frac{24}{Re}$$

と書かれることが多いです。ストークス方程式を作った話から $Re < 1$ のとき有効で、この領域で実験とよく一致しています。

電荷を初めて精密に測定したミリカン (Millikan) の実験ではストークスの公式が使われています。ミリカンの実験は、電荷を持たせた球形の油滴（油の粒）を落下させ、そこに落下の方向とは逆向きにクーロン力を作用させるというものです。どのようにして求められたかを雑に見ていきます。

油滴は電荷 q を持つとします。まず、油滴を落下させる実験で使用する油滴の大きさを求めます。落下する油滴に作用する力には、重力、浮力、空気抵抗があり、空気抵抗に対してストークスの公式が使われました。

油滴は半径 a の球体になっているとして、油滴の密度を ρ 、重力加速度を g とすれば重力の作用は

$$F_g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g$$

浮力は空気の密度を ρ_{air} として、アルキメデスの原理から（「静止している流体」参照）

$$F_b = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{\text{air}} g$$

そして、 μ を空気の粘性として空気抵抗をストークスの公式から

$$F_r = 6\pi V_0 \mu a$$

と与えます。重力と浮力は逆向きに作用するので

$$F_{gb} = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \rho_{\text{air}}) g$$

F_{gb} と空気抵抗が釣り合っているときの油滴の終端速度 $V^{(1)}$ は、無限遠での流体が油滴に向かっていく速度 V_0 と言えるので

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \rho_{\text{air}}) g = 6\pi \mu a V^{(1)} \quad (10)$$

$\rho > \rho_{\text{air}}$ としています。 $\rho, \rho_{\text{air}}, \mu$ は別の測定から分かっているとすれば、 $V^{(1)}$ を測定することで a が求まります。

次に落下している油滴に下から電場 E (クーロン力 $|q|E$) を作用させます。このときの空気抵抗以外の力は

$$|q|E - \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \rho_{\text{air}}) g$$

これが空気抵抗と釣り合っているなら

$$|q|E - \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \rho_{\text{air}}) g = 6\pi \mu a V^{(2)}$$

(10) を入れれば

$$|q| = \frac{6\pi \mu a}{E} (V^{(1)} + V^{(2)})$$

となり、 $a, \rho, \rho_{\text{air}}, \mu, V^{(1)}, E$ は分かっている量なので、 $V^{(2)}$ の測定で $|q|$ の値が求まります。このようにすることで、ミリカンは素電荷の値として $1.59 \times 10^{-19} [\text{C}]$ を与えました (現在の素電荷の値は $1.602 \times 10^{-19} [\text{C}]$)。

・補足

(9a),(9b),(9c) をデカルト座標にします。デカルト座標の基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ にすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \\ &= v_r (\mathbf{e}_1 \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_3 \cos \theta) + v_\theta (\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \phi - \mathbf{e}_3 \sin \theta) \\ &= (v_r \sin \theta \cos \phi + v_\theta \cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (v_r \sin \theta \sin \phi + v_\theta \cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 + (v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

なので、 v_1 は

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_r \sin \theta \cos \phi + v_\theta \cos \theta \cos \phi \\
&= V_0 \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} - 1 + \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\
&= V_0 \left(-\frac{3a}{4r} + \frac{3a^3}{4r^3} \right) \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r} \frac{x_3}{r} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \\
&= -\frac{3V_0 a}{4r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) x_1 x_3
\end{aligned}$$

v_2 は

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_r \sin \theta \sin \phi + v_\theta \cos \theta \sin \phi \\
&= V_0 \left(-\frac{3a}{4r} + \frac{3a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\
&= V_0 \left(-\frac{3a}{4r} + \frac{3a^3}{4r^3} \right) \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r} \frac{x_3}{r} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= -\frac{3V_0 a}{4r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) x_2 x_3
\end{aligned}$$

v_3 は

$$\begin{aligned}
v_3 &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\
&= V_0 \left(\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos^2 \theta + \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin^2 \theta \right) \\
&= V_0 \left(\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \frac{x_3^2}{r^2} + \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} \right) \\
&= V_0 \left(\frac{x_3^2}{r^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} - \frac{3a}{2} \frac{x_3^2}{r^3} - \frac{3a}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3} + \frac{a^3}{2} \frac{x_3^2}{r^5} - \frac{a^3}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^5} \right) \\
&= V_0 \left(1 - \frac{3a}{2} \frac{x_3^2}{r^3} - \frac{3a}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^3} + \frac{3a}{4} \frac{x_3^2}{r^3} + \frac{a^3}{2} \frac{x_3^2}{r^5} - \frac{a^3}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^5} + \frac{a^3}{4} \frac{x_3^2}{r^5} \right) \\
&= V_0 \left(1 - \frac{3a}{2} \frac{x_3^2}{r^3} - \frac{3a}{4} \frac{1}{r} + \frac{3a}{4} \frac{x_3^2}{r^3} + \frac{a^3}{2} \frac{x_3^2}{r^5} - \frac{a^3}{4} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3}{4} \frac{x_3^2}{r^5} \right) \\
&= V_0 \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} - \frac{3a}{4} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) x_3^2 \right)
\end{aligned}$$

圧力はスカラーなのでそのまま変形して

$$P = -\frac{3V_0 \mu a}{2r^2} \cos \theta + P_0 = -\frac{3V_0 \mu a}{2r^2} \frac{x_3}{r} + P_0 = -\frac{3V_0 \mu a}{2r^3} x_3 + P_0$$

これからも同じようにすることでストークスの公式を導けます。