

運動方程式と測地線方程式

3次元ユークリッド空間での粒子の運動はニュートンの運動方程式に従って軌道を描きますが、このことを拡張し、測地線方程式によって粒子の軌道が描けることを見ます。

話は簡単で解析力学と同じように変分問題を考えて、オイラー・ラグランジュ方程式を使います。そしてこれによって描かれる軌道は測地線になるので、測地線方程式に対応することがわかります。

「測地線方程式」で変分問題で測地線方程式を導いたのと同じ方法を使い、測地線を出します。まず、何をするのか分かりやすくするために、4次元ミンコフスキー空間の変分問題を考えてみます。線素は(線素を書くとき、通常は計量を下付きに取ります)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

新しいパラメータを導入せずに、両辺を ds^2 で割ってルートを取った

$$\frac{ds}{ds} = 1 = \left(c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right)^{1/2}$$

を使うことにすれば、変分問題は

$$\delta \int_{s_i}^{s_f} ds = \delta \int_{s_i}^{s_f} ds \left(c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right)^{1/2} = 0$$

となります。変分を考えるとときにはルートは無視した方が便利なので、ラグランジアン L に相当するものを

$$L = c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

と与えます。後で分かりますが、このラグランジアンは直接ニュートンの運動方程式になりません。

この変分問題では s が積分変数で、時間が座標の中に入っているため、よく見るラグランジアンを時間で積分するという形では書いてないですが、これは簡単に変更することができます。それを一応見ておきます。

4次元でのオイラー・ラグランジュ方程式は、 $\mu = 0, 1, 2, 3$ として

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds})$$

これの時間座標微分部分は ($ct = x^0$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} \left(c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^0} \left(c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial ct} \left(c^2 (\dot{t})^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left(c^2 (\dot{t})^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) \\ &= - \frac{d}{ds} \frac{1}{c} 2c^2 \dot{t} \\ &= - \frac{d}{ds} 2c \frac{dt}{ds} \end{aligned}$$

なので

$$-\frac{d}{ds}2c\frac{dt}{ds} = 0$$

これは s で積分すると

$$\frac{dt}{ds} = C$$

という任意定数になるので、 $C = 1$ と選んでやれば

$$dt = ds$$

これを変分問題に入れなおすことで

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dt (c^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}) = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt (g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}) = 0$$

c^2 の項は定数なので変分を取れば 0 になります。このように解析力学で出てくる時間で積分される形と同じになっています。計量が $(+, -, -, -)$ になっていることから分かるように、二番目の式の $()$ 内ではマイナスが出てきます。こんなことが起きるので、一般相対性理論の話では $(-, +, +, +)$ を選ぶことが多いです。 $()$ 部分を計算してみると (3次元速度 dx^i/dt を v^i として)

$$c^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2 - |\mathbf{v}|^2$$

第二項部分に $1/2$ と質量 m をかければ非相対論的な自由粒子のラグランジアンになり、第一項では質量をかけることで mc^2 となり静止質量になります (下の補足参照)。

もう少し複雑な状況として回転座標系での場合を詳しくみていきます。定常的 (計量が時間依存性を持たない) で軸対称性を考慮した線素は

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2\omega r^2 d\varphi dt + dz^2) \quad (1)$$

これは z 軸を中心に角速度 ω で回転させたものです (円筒を回転させたもの)。最初に 3次元座標を (r, φ, z) としておき、これに回転として $\varphi = \varphi' - \omega t$ を作用させています。つまり、デカルト座標の線素を円筒座標 (r, φ', z) で書いた

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi'^2 + dz^2)$$

これに対して

$$d\varphi = d\varphi' - \omega dt$$

の置き換えをすることで出てきます。これが定常的で z 軸に対して対称になっているのは、 $t \rightarrow -t$ と $\varphi \rightarrow -\varphi$ を同時に行うことで計量が不変になっているからです (また、この条件を最初に設定することで $g_{01} = g_{03} = g_{12} = g_{23} = 0$ という条件が計量にかさねます)。後は同じように計算していただけます。

この線素による変分問題は

$$\begin{aligned} & \delta \int_{s_i}^{s_f} ds \left((c^2 - \omega^2 r^2) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + 2\omega r^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{dt}{ds} + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right) \\ &= \delta \int_{s_i}^{s_f} ds \left((c^2 - \omega^2 r^2) t^2 - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2\omega r^2 \dot{\varphi} t + \dot{z}^2) \right) \\ &= \delta \int_{s_i}^{s_f} ds L \end{aligned}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

今度は $\mu = 0$ だけでなく全ての成分を計算します。

- $x^0 = ct$ の場合

$$\frac{\partial L}{\partial ct} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{ct}} = \frac{d}{ds} [2(c^2 - \omega^2 r^2)t - 2\omega r^2 \dot{\varphi}] = 0$$

これは s 積分して

$$(c^2 - \omega^2 r^2)t - \omega r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

- $x^1 = r$ の場合

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -2\omega^2 r t^2 - 2r \dot{\varphi}^2 - 4\omega r \dot{\varphi} t + 2\ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r t^2 + r \dot{\varphi}^2 + 2\omega r \dot{\varphi} t$$

- $x^2 = \varphi$ の場合

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{ds} [2r^2 \dot{\varphi} + 2\omega r^2 t] = 0$$

なので積分して

$$r^2\dot{\varphi} + \omega r^2\dot{t} = \text{const}$$

- $x^3 = z$ の場合

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2\ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0$$

これが全ての成分に対するものになり、まとめると

$$\bullet (c^2 - \omega^2 r^2)\dot{t} - \omega r^2\dot{\varphi} = \text{const} \quad (2a)$$

$$\bullet \ddot{r} = \omega^2 r\dot{t}^2 + r\dot{\varphi}^2 + 2\omega r\dot{\varphi}\dot{t} \quad (2b)$$

$$\bullet r^2\dot{\varphi} + \omega r^2\dot{t} = \text{const} \quad (2c)$$

$$\bullet \ddot{z} = 0 \quad (2d)$$

これらが軌道の式になります。これらを使って、回転させたときに現れる遠心力とコリオリ力が出てくることを見ます。

まず (2c) に ω をかけて

$$\omega r^2\dot{\varphi} + \omega^2 r^2\dot{t} = \text{const}$$

これと (2a) を足せば

$$c^2\dot{t} = \text{const}$$

この定数を光速 c としても物理的に何の影響もないので (時間の尺度は適当に変えても問題ない)

$$\dot{t} = \frac{1}{c}$$

とできます。遠心力を考える時には動径方向の力を考えるので $\varphi = 0$ とします。そうすると (2b) は

$$\ddot{r} = \omega^2 r(\dot{t})^2 = \frac{r\omega^2}{c^2}$$

これは固有時間 τ を使うと

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r\omega^2$$

になって、これに質量をかければ見慣れた遠心力の式になります。

今度は (2c) を s でもう一回微分します

$$\begin{aligned} r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} + \omega r^2 \dot{t} + 2r\omega r \dot{t} &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + \frac{2\omega}{c}\dot{r} \\ &= r\ddot{\varphi} + \frac{2\omega}{c}\dot{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

これも固有時間 τ に直せば

$$r \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\omega \frac{dr}{d\tau} = 0$$

これはコリオリ力になります。

見てきたように、測地線を導くように変分問題、オイラー・ラグランジュ方程式を使うことで、粒子の軌道(力学の結果)を導きました。なので、曲がった空間での運動方程式は測地線方程式になり、測地線方程式によって粒子の軌道は描かれます。これは、現実の粒子は曲がった空間上での最短距離を進むという考え方からです。

最後に回転していることによる影響をもう少し見ておきます。いきなり変な話をするので、なんとなく見てください。今みている系(定常的に回転している系)において、計量の形は(1)から

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} & 0 & -\frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega r^2}{c} & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\omega}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-\omega}{c} & 0 & \frac{c^2 - r^2\omega^2}{c^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

共変な基底ベクトルとして

$$e_{(0)\mu} = (1, 0, 0, 0), \quad e_{(1)\mu} = (0, -1, 0, 0), \quad e_{(2)\mu} = \left(-\frac{r\omega}{c}, 0, -r, 0\right), \quad e_{(3)\mu} = (0, 0, 0, -1)$$

こんなものを考えます。 μ がベクトルの成分を表し、() 付の添え字でベクトルの区別をしています。これは、線素(1)を変形して

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r^2 \left(d\varphi + \frac{\omega}{c} c dt\right)^2 - dr^2 - dz^2$$

とすると、 $e_{(0)\mu}$ が $c^2 dt^2$ の項、 $e_{(1)\mu}$ が dr^2 の項、 $e_{(2)\mu}$ の 0 成分が cdt の項で 2 成分が $d\varphi$ の項、 $e_{(3)\mu}$ が dz^2 の項に対応しています。反変での基底ベクトルは

$$e_{(0)}^\mu = (1, 0, -\frac{\omega}{c}, 0), \quad e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad e_{(2)}^\mu = (0, 0, r^{-1}, 0), \quad e_{(3)}^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

これらは

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるように選んでいます。計量テンソルは基底ベクトルによって $g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu$ というように表すことが出来るので (これは任意のベクトル A を基底ベクトルを使って $A = A^\mu e_\mu$ と表し、これともう一つの任意のベクトルと内積をとると、 $A \cdot B = (A^\mu e_\mu) \cdot (B^\nu e_\nu) = A^\mu B^\nu (e_\mu \cdot e_\nu)$ 、つまり $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ (今の場合なら $e_{(a)\mu} e_{(b)}^\mu = g_{\mu\nu}$) とすることで内積の式になります)、元の系での計量を再現します。

このような4つの直交する基底ベクトル ($\eta_{(a)(b)} e_{(a)\mu} e_{(b)}^\mu = \delta_{(a)}^{(b)}$) が出てきて、この基底ベクトルを軸 (x, y, z 軸のような) とする局所的な慣性系を作れます。計量 $\eta_{(a)(b)}$ がミンコフスキー計量になるようにしたので、() のついた添え字に関して縮約をとるように適当なベクトルを作り内積を取ればミンコフスキー空間での内積になります ($X^{(a)} e_{(a)}^\mu Y^{(b)} e_{(b)\mu} = X^{(a)} Y^{(b)} e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = X^{(a)} Y^{(b)} \eta_{(a)(b)}$)。このような4つの基底ベクトルはテトラッド (tetrad) と呼ばれるものですが細かいことは置いといて、ここではこのようなものが作れて、書いてあるような性質があるんだ程度にしておきます。

元の座標系におけるある点での4元速度を求めます。線素を $c^2 dt^2$ で割って

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{ds^2}{dt^2} &= 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} - \left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{c^2 dt^2} + 2\omega r^2 \frac{d\varphi dt}{c^2 dt^2} + \frac{dz^2}{c^2 dt^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{c^2} (\omega^2 r^2 + \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - 2\omega r^2 \dot{\varphi} - \dot{z}^2) \end{aligned}$$

これより、ある点での4元速度 (u^0, u^1, u^2, u^3) は (固有時間 $d\tau$ によるものでなく ds で定義しています。 $(cd\tau)^2 = ds^2$ なので、速度の次元でなく無次元になります)

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{cdt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (V^2 = \omega^2 r^2 + \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - 2\omega r^2 \dot{\varphi} - \dot{z}^2) \\ u^1 &= \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ u^2 &= \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dot{\varphi}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ u^3 &= \frac{dz}{ds} = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}$$

これらに対して、テトラッドを使えば

$$u^{(a)} = e_{(a)}^\mu u^\mu = \eta^{(a)(b)} e_{(b)\mu} u^\mu$$

なので

$$u^{(0)} = e_{(0)\mu} u^\mu = (1, 0, 0, 0)(u^0, u^1, u^2, u^3) = u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$u^{(1)} = -e_{(1)\mu} u^\mu = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$u^{(2)} = -\left(-\frac{r\omega}{c}, 0, -r, 0\right)(u^0, u^1, u^2, u^3) = \frac{r\omega}{c}u^0 + ru^2 = \frac{r(\dot{\varphi} + \omega)}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$u^{(3)} = -e_{(3)\mu} u^\mu = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$u^{(2)}$ での $r(\dot{\varphi} + \omega)$ が局所的な慣性系での角速度になります。これで何がわかるかというと、今見ている点が慣性系で静止しているとしたら ($u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)} = 0$)、角速度は $\dot{\varphi} + \omega = 0$ となるはずですが、つまり、慣性系で静止しているのに元の座標系では $\dot{\varphi}$ は 0 とならず ω という角速度を持ちます。これが慣性系の引きずりと呼ばれるものです。

・補足

最初にミンコフスキー空間での自由粒子のラグランジアンの話をしました。そこでのラグランジアンは直接非相対論的な自由粒子とは一致していませんでした。直接一致させるためのラグランジアンをここでは求めてやります。上での結果から定数部分の操作だけで非相対論的な場合に対応させることが分かっているので、定数部分を決定させるように求めます (特殊相対論をやった人はもっとちゃんとした導出方法を見たことがあると思います)。

非相対論的なラグランジアンと直接対応させるためには

$$L_1 = (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt})^{1/2} = \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}$$

として、ルートがついた状態から始めます。このときの作用として

$$S = -A \int_{s_i}^{s_f} ds = -A \int_{t_i}^{t_f} L_1 dt$$

という形を仮定してます。マイナスがついているのは上での結果ではマイナスをつけることで非相対論的な場合になっていたからです (もしくはマイナスをつけないと積分が最小値を持たないから)。A は正の任意定数で、これを上手く選ぶことで非相対論的な場合に対応させます。L₁ の形を入れて

$$\begin{aligned} S &= -A \int_{t_i}^{t_f} (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt})^{1/2} dt \\ &= -A \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2} dt \\ &= -Ac \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} dt \end{aligned}$$

任意の定数である A は非相対論的な場合と一致させるように取ればいいので、非相対論的の極限を取ります。非相対論的の極限は $|\mathbf{v}| \ll c$ とすればいいので

$$-Ac\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2} \simeq -Ac + \frac{Ac}{2} \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} + \dots = -Ac + \frac{A}{2c} |\mathbf{v}|^2 + \dots$$

第一項 $-Ac^2$ は定数項なので、ラグランジアンからは外すことができます (定数項は運動方程式に効かないから)。そして、非相対論的なラグランジアンは $m|\mathbf{v}|^2/2$ なので、 A は mc とすればいいことが分かります。よって、作用は

$$S = -mc \int_{t_i}^{t_f} (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt})^{1/2} dt = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2} dt$$

となり、ラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}$$

となります。これがより正確なミンコフスキー空間での自由粒子の作用とラグランジアンです。これはもっと単純な手順ですれば (やってることは同じ)、ミンコフスキー空間での世界線を変形させて

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (cdt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \dots\right) \\ &= (cdt)^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}\right) \quad \left(\mathbf{v} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)\right) \\ ds &= cdt \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2} \end{aligned}$$

これを作用の式にいれれば

$$S = -A \int_{s_i}^{s_f} ds = -Ac \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2} = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}$$

このように同じものが出てきます。

ついでにハミルトニアンも求めます。ハミルトニアンを求めるには共役な運動量が分かればよくて、それは

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}}$$

と求められます。ハミルトニアンは $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ なので

$$\begin{aligned}
H &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \\
&= \frac{m|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} \\
&= \frac{m|\mathbf{v}|^2 + mc^2 - m|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}}
\end{aligned}$$

この非相対論的極限をとれば

$$H \simeq mc^2 \left(1 + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$$

となって、第一項が静止エネルギー、第二項が非相対論的な自由粒子の運動エネルギーとなります。