事象の地平面と無限赤方偏移面

物理の中で最も有名な単語の 1 つであろうブラックホールに関連した話をしていきます。
事象の地平面と無限石棒偏移面を見ていきますが、事象の地平面の内側については触れません。

「シュバルツシルト解～クルスカル座標～」で事象の地平面について簡単にふれましたが、性質を調べていきます。また、ブラックホールは大雑把には事象の地平面がむき出しになっている天体のことです。

シュバルツシルト解でのシュバルツシルト半径 $r = 2m$ の面を事象の地平面 (event horizon) と呼びますが、それが何なのか見ていきます。シュバルツシルト計量は

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})(cdt)^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

そして、赤方偏移を表わす式は

$$\nu = \nu_0(\frac{g_{00}(x_s^\mu)}{g_{00}(x^\mu)})^{1/2}$$

と与えられています。ν は観測側 (x^μ) での光の振動数、ν_0 は x_s^μ で静止している源から放出された光の固有振動数です。シュバルツシルト空間におけるある静止した点から放出される光を観測したときの振動数を求めたければ、シュバルツシルト計量の g_{00} を分子に使えばいいということです。

このとき、$g_{00} = 0$ となる場所では振動数が 0、言い換えると波長が無限大に伸びることになります。これは無限大の赤方偏移が起きていることを意味し、それが起こる場所がシュバルツシルト半径 $r = 2m$ の面です。このことから、この面のことを無限赤方偏移面 (infinite red shift surface) と呼びます。つまり、シュバルツシルト解では、事象の地平面となる面と、無限大の赤方偏移を起こす面は同じ位置にいます。ただし、まだこの段階では事象の地平面の意味は明確にしていないので、ただの特異面です。なので、これから事象の地平面がどういった面になっているのか示していきます。

性質を示すためにヌル超曲面の概念をを導入します。ヌル超曲面を考える理由は、これから示すようにヌル超曲面は常に半透膜の役割をするためで、それが地平面の性質になるからです。ちなみに、半透膜はその面を通過したら外には出てこれない面のことです。

滑らかな超曲面 S は

$$u(x^\mu) = const$$

と定義できます (「超曲面」参照)。ベクトル $n_\alpha = u_{|\alpha}$ は超曲面 S に対する法線です。これは dx^α（S 上での）との内積は

$$n_\alpha dx^\alpha = u_{|\alpha}dx^\alpha = du = 0$$

として、直交するからです (u は一定なので $du = 0$)。また、S 上で局所的な点 P を考え、そこでは局所的にミンコフスキー計量

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

が使えるとします。これによって点 P において、局所的な光円錐 $ds^2 = 0$ を超曲面上で定義できます。

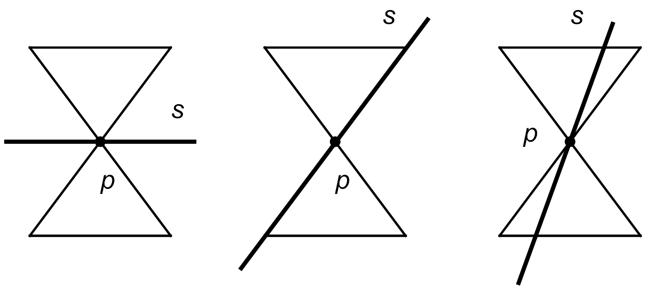

図 1: 超曲面の配置

さらに、3 次元回転によって n^α の空間部分を

$$n^\alpha = (n^0, n^1, 0, 0)$$

$$n^\alpha n_\alpha = (n^0)^2 - (n^1)^2$$

として、x 軸に沿ったものにできます (点 P での計量はミンコフスキー計量)。法線ベクトルのこの形は、点 P での超曲面 S の接ベクトル t^α の形を制限します。これは、法線ベクトルと接ベクトルは直交するために

$$n_\alpha t^\alpha = n^0 t^0 - n^1 t^1 = 0 \ , \ \frac{t^0}{t^1} = \frac{n^1}{n^0}$$

つまり、t^α は

$$t^\alpha = \lambda(n^1, n^0, a, b)$$

λ, a, b は任意です。t^α の内積は

$$\begin{aligned} t^\alpha t_\alpha &= \lambda^2((n^1)^2 - (n^0)^2 - a^2 - b^2) \\ &= -\lambda^2(n^\alpha n_\alpha + (a^2 + b^2)) \end{aligned}$$

法線の内積と S の接ベクトルの関係によって、S の配置に関して 3 つのケースが考えられます。
特殊相対論での光円錐と同じものを考えられて

- n^α が時間的、$n^\alpha n_\alpha > 0$。このとき $t^\alpha t_\alpha$ は負になるので t^α は空間的。つまり点 P で S の接ベクトルは空間的な軸の上にのるので局所的な光円錐上にはのっていない (左図)。
- n^α がヌル、$n^\alpha n_\alpha = 0$。このとき $t^\alpha t_\alpha$ は $a = b = 0$ 以外で負になり、$a = b = 0$ では 0 になる。そのため点 P で S の接ベクトルは 1 つが局所的な光円錐上にのる (真ん中)。
- n^α が空間的、$n^\alpha n_\alpha < 0$。このとき $t^\alpha t_\alpha$ は正負もしくは 0 になる。特に $t^\alpha t_\alpha = 0$ は $a^2 + b^2 = -n^\alpha n_\alpha > 0$ によって円上に定義される。つまり、点 P で S の接ベクトルの集まりは光円錐上にのる (右図)。

これらの意味を見ていきます。

物理的な物体は、空間的な超曲面に対しては両方向から通過でき、時間的な超曲面では 1 つの方向のみ通過できます。そして、ヌル超曲面では半透膜として作用します。

例として、シュバルツシルト空間の特異面を見ます。シュバルツシルト解での球の表面 $r = const$ での法線ベクトルは動径方向なので、$n_\alpha = (0, 1, 0, 0)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
n^\alpha &= g^{\alpha\beta} n_\beta = -(1 - \frac{2m}{r})(0, 1, 0, 0) = (0, -(1 - \frac{2m}{r}), 0, 0) \\
n^\alpha n_\alpha &= -(1 - \frac{2m}{r})
\end{aligned}
$$

よって、r が $2m$ より大きければ空間的なので、粒子はすき放題にその面を通過でき、$2m$ になるとヌルになり半透膜の役割を持つようになり、$2m$ 未満になることで時間的となります。つまり、シュバルツシルト面 $r = 2m$ が半透膜の役割を持っています。これが、$r = 2m$ の面が事象の地平面と呼ばれる理由で、この面より内側に一度入ったら外に出てこれません。

まとめれば、$r = 2m$ の特異面は

- 無限大の赤方偏移（無限赤方偏移面）
- 光円錐上か内側での粒子に対して半透膜として作用する (事象の地平面)

という性質を持っています。これらがブラックホールの話でよく出てくる性質です。

次に回転している場合を見ていきます。なので、カー解を使います。ちなみに、回転しているブラックホールが一般的なブラックホールと考えられています。カー解は

$$
\begin{aligned}
ds^2 = (1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})(cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{a^2 + \rho^2 - 2m\rho} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\
- ((\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})d\varphi^2 - 2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} cdtd\varphi
\end{aligned}
$$

まず、無限赤方偏移面がどこなのか求めるために、g_{00} が 0 になる ρ を求めます。$g_{00} = 0$ になるには

$$
\rho^2 - 2m\rho + a^2\cos^2\theta = 0
$$

よって、ρ は

$$
\rho_{\pm\infty} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}
$$

となるので、2 つの無限赤方偏移面を持つことが分かります。ここではブラックホールの内部空間には触れないので、$\rho_{+\infty}$ のほうだけを採用します（$\rho_{-\infty}$ は事象の地平面の内側にあるから）。$\rho_{+\infty}$ は ρ_∞ と書いていきます。また、カー解を見て分かるように、特異面は他にもありますが、それは後で扱います。

外側の無限赤方偏移面 ρ_∞ はヌル超曲面 (半透膜) ではないことを示します。法線ベクトルは

$$
\begin{aligned}
&\rho_\infty = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho_\infty) = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}} \\
&n_\alpha = (0, 1, -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}}, 0)
\end{aligned}
$$

n^α を求めるには反変の計量 $g^{\mu\nu}$ の g^{11}, g^{22} が分かればいいです。この 2 つは g_{11}, g_{22} の逆になっているので、簡単に分かり

$$\begin{aligned}
n^\alpha &= g^{\alpha\beta} n_\beta \\
&= g^{\alpha 0} n_0 + g^{\alpha 1} n_1 + g^{\alpha 2} n_2 + g^{\alpha 3} n_3 \\
&= (0, -(\frac{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2\theta}), -\frac{1}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}, 0) \cdot (0, 1, -\frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}}, 0) \\
&= (0, -(\frac{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2\theta}), \frac{1}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}}, 0)
\end{aligned}$$

なので、ノルムは

$$n^\alpha n_\alpha = -\frac{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + (a^4 \cos^2\theta \sin^2\theta)/(m^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}$$

これは明らかに負になるので、無限赤方偏移面は物理的な粒子が両方向から通過できる面と分かり、地平面とはなっていません。

というわけで、カー解でのヌル超曲面はどこなのか求めます。超曲面 u と法線 n_α は

$$u(r, \theta) = const \ , \ n_\alpha = (0, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, 0)$$

u の微分方程式として、n_α のノルムが 0 と設定することで

$$\begin{aligned}
0 = &\ -(\frac{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})(\frac{\partial u}{\partial r})^2 - \frac{1}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}(\frac{\partial u}{\partial \theta})^2 \\
= &\ (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)(\frac{\partial u}{\partial r})^2 + (\frac{\partial u}{\partial \theta})^2
\end{aligned}$$

と出てきます。これは $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ のように分離して

$$\begin{aligned}
-(\rho^2 + a^2 - 2m\rho)(\frac{\partial (R\Theta)}{\partial \rho})^2 &= (\frac{\partial (R\Theta)}{\partial \theta})^2 \\
-(\rho^2 + a^2 - 2m\rho)(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho})^2 &= (\frac{1}{\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta})^2
\end{aligned}$$

変数が分離しているので、適当な定数 λ に等しくなるはずです。なので、Θ について解いてやれば

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta})^2 &= \lambda \\
\Theta &= A \exp(\sqrt{\lambda}\theta)
\end{aligned}$$

A は任意定数です。しかし、これは一般解ではないです。θ に対して周期的になっていないためで、つまり $\lambda=0$ でない限り実際の面に対応しません ($\lambda=0$ で $\Theta=const$)。よって、$\lambda=0$ より

$$(\rho^2+a^2-2m\rho)(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho})^2=0$$

これは $\partial R/\partial\rho=0$ とならないとして

$$\rho_\pm=m\pm\sqrt{m^2-a^2}$$

これがヌル超曲面になる ρ で、カー空間の事象の地平面の半径になり、g_{11} で発散がおこる $\rho^2+a^2-2m\rho=0$ に対応します。地平面も $\pm$ による 2 個存在していますが、ρ_+ の方 (外側) を考えます。

ρ_+ の位置は $\rho_{-\infty}$ よりも外側にあることはすぐに分かります。よって、カーブラックホールにおいては、無限赤方偏移面と事象の地平面は同じ位置でないことがはっきりと分かります (ただし、$\theta=0,\pi$ では一致する)。

これでカー解での無限赤方偏移面は $g_{00}=0$、事象の地平面は g_{11} の分母が 0 になるところと分かったので、カー・ニューマン解では

$$r_{\pm\infty}=m\pm\sqrt{m^2-a^2\cos^2\theta-e^2}$$
$$r_\pm=m\pm\sqrt{m^2-a^2-e^2}$$

で与えられることも分かります。ライスナー・ノルトシュトレーム解では、無限赤方偏移面と事象の地平面の位置は同じで

$$r_\pm=m\pm\sqrt{m^2-e^2}$$

となります。このため、カー・ニューマン解での無限赤方偏移面と事象の地平面から

$a=0,e=0$	$\Rightarrow$	シュバルツシルト解
$a=0$	$\Rightarrow$	ライスナー・ノルトシュトレーム解
$e=0$	$\Rightarrow$	カー解

として、他の解の場合が求まります。シュバルツシルト解以外は地平面が 2 つ存在しており、地平面の内側にもう 1 つ地平面があるために、シュバルツシルト解と違い簡単に内部空間がどうなっているのか調べられません。

事象の地平面 ρ_+ と無限赤方偏移面 $\rho_{+\infty}$ の間のことをエルゴ領域 (ergo region) やエルゴ球 (ergosphere) と呼びます (図は $a=m/2$ としています)。

回転ブラックホールでの無限赤方偏移面は無限大の赤方偏移を起こすという性質だけでなく、この面よりも内側に入ってしまうと粒子は回転に逆らうことができなくなり、静止していられないという性質を持ちます。このため、この面を定常性限界面とも呼びます。このことを光子の場合で見ておきます。

考えるのは $\rho=const$ で $\theta=\pi/2$ の赤道面での運動とすると

$$ds^2=g_{00}(cdt)^2+g_{33}d\varphi^2+2g_{03}dtd\varphi=0$$

これより

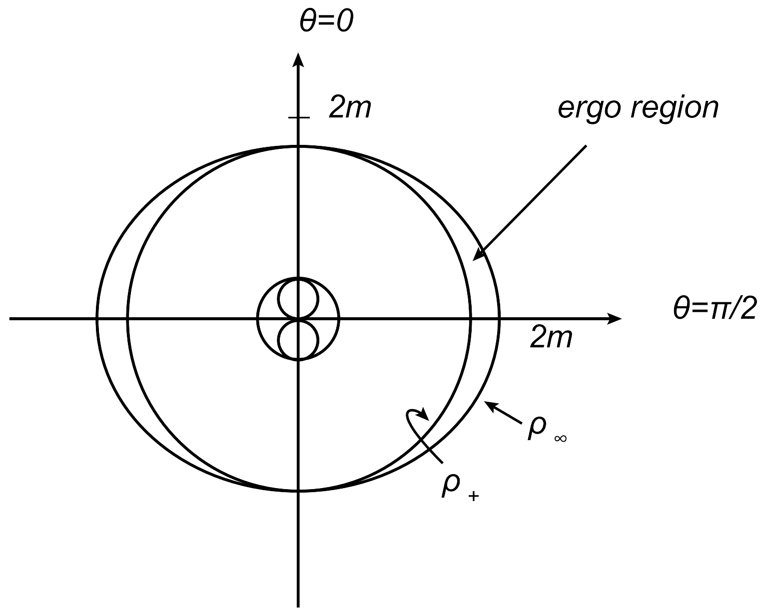

図 2: エルゴ球

$$(\frac{d\varphi}{cdt})^2 + 2\frac{g_{03}}{g_{33}}\frac{d\varphi}{cdt} + \frac{g_{00}}{g_{33}} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{cdt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{(\frac{g_{03}}{g_{33}})^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}$$

これに対して、$g_{00} = 0$（無限赤方偏移面）としてみると

$$\frac{d\varphi}{cdt} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{cdt} = -2\frac{g_{03}}{g_{33}} = -2\frac{2m\rho a \sin^2\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)(a^2+\rho^2)\sin^2\theta + 2m\rho a^2 \sin^4\theta}$$

という 2 つの式が出てきます。2 番目の式から、a はブラックホールの回転の逆符号なので、光子はブラックホールの回転方向と同じ方向に回転します。1 番目の式は位置が変化しない、つまりブラックホールと逆方向に動こうとしても動けないことを意味します。これは、無限赤方偏移面にいる粒子が座標系で静止していることは、光速で動いていることにもなります。光子でさえこのような状況になることから、光子よりも遅い粒子はブラックホールと同じ方向に回転するしかなくなります。そして無限赤方偏移面以内では $g_{00} < 0$ となるために、ルート部分は g_{03}/g_{33} よりも大きくなれないので、静止できずにブラックホールの回転方向に回転することになります。

最後に、内部空間に軽く触れておきます。カー解を見ると、他にも発散する場合があり、それは

$$\rho^2 + a^2\cos^2\theta = 0$$

であり、これから $\rho = 0$ で $\cos\theta = 0$ となります。これは真の特異点で、リング状特異領域といいます。リング状とついているのは、$\theta = \pi/2$ なので赤道面上での $\rho = 0$ の円であるためです。この時点で何を言っているんだという状況になっていますが、内側の事象の地平面 ρ_- よりもさらに内側のこの領域は、とんでもない領域になっています。外側の地平面 ρ_+ と内側の地平面 ρ_- の間の領域は ρ が時間的で t が空間的になります。そして、リング状

特異領域の付近は因果律を破りたい放題になっていて、カーター・タイムマシンと呼ばれています。また、カー・ニューマン解では電荷のせいで $\rho = 0$ が動きます。