アフィン接続係数と平行移動

曲がった空間を扱うための準備として、リーマン空間を導入します。
最初は、ここでの話は雑に見て、結果だけなんとなく分かれば十分です。
Γ^i_{jk} の符号の定義が最後のほうで変えているので注意してください。

一般相対性理論において重力を曲がった空間として扱うのは、アインシュタインの等価原理による考察の結果です。簡単に言ってしまえば、一様な加速度で動いているとき、その加速度と重力を区別できないので、重力は力ではないと考えることです。この考えから、重力による落下 (自由落下) は加速度による運動ではなく、曲がった空間上の自由な運動 (測地線に沿った運動) とします。これは十分小さな領域で成立するとし、自由落下とみなせるその領域を局所慣性系 (locally inertial frame) と呼びます。ここら辺の話は例えば「Lecture Notes on General Relativity」(gr-qc/9712019) なんかが分かりやすいです。
曲がった空間を扱うための数学を用意していきます。

- **アフィン接続係数**

最初に感覚的に分かりやすい直線的な座標系が取れる場合での、定ベクトルから見ておきます。ある点 P でのベクトルを

$$\xi^{(1)}(P) = (dx^1, 0, \cdots, 0)$$

とします (n 次元ベクトルに慣れていない人は 3 次元ベクトルと思ってしまえばいいです)。ξ についている (1) は 0 でない値を持っている成分を表し、dx^1 は定数です。

ベクトルの大きさを距離と言っていきます (距離の 2 乗を距離と言ってしまいます)。距離は線素のことなので、空間の計量 g_{ij} を使って $g_{11}(P)(dx^1)^2$ で表せます。g_{11} の (P) は点 P での g_{11} であることを強調するために書いてます。

同じベクトルが他の点 Q にいるとすれば、距離は $g_{11}(Q)(dx^1)^2$ になります。この 2 つの距離が等しいと言うためには $g_{11}(P) = g_{11}(Q)$ であればいいです。つまり、任意の点で計量 g_{11} が同じである必要があります。

ベクトルの成分を一般化して

$$\xi^{(i)}(P) = (0, \cdots, dx^i, 0, \cdots, 0)$$

として同様のことを考えれば、i 番目の成分に対応する計量 g_{ii} が空間の各点で同じ値になります。、また、0 でない成分の異なるベクトルの和

$$\xi^{(i)} + \xi^{(j)} \quad (i \neq j)$$

を考えれば (例えば、$\xi^{(i)}$ が $i = 1$ 番目の成分、$\xi^{(j)}$ が $j = 3$ の成分を持つなら g_{13})、計量 g_{ij} が一定になる必要があることが分かります。

これから言いたいことは、計量 g_{ij} が定数である座標系があるなら、空間全体にわたって距離が同じになるベクトル (定ベクトル) がいるということです。こういった性質をもつ空間を擬ユークリッド空間 (pseudo Euclidean space) と呼んでおり、計量が定数になる座標系は直線的な座標系です。そして、計量の形は線形変換によって、全ての点で正準形式 (± 1 の対角行列になるようなもの) に変えることができます (これは線

形代数の話と同じです)。なので、簡単に言えば、ユークリッド空間での計量は正の値なのに対して、擬ユークリッド空間では負の値も取れます。

しかし、定ベクトルはテンソルとして使えません。座標系 (x^a) から $(\overline{x}^a)$ へのベクトル ξ^i の変換は変換則より

$$\overline{\xi}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\xi^k$$

となり、偏微分部分が任意なので $\overline{\xi}^i$ は一般的に定数ではないです。つまり、座標系 (x^a) で定数成分をもつベクトル ξ^i を用意しても、別の座標系 $(\overline{x}^a)$ での $\overline{\xi}^i$ は定数になるとは限らないです。このことから、定ベクトルはテンソルによる定式化に適していないことが分かります。定ベクトルであることは擬ユークリッド空間における線形変換の場合においてのみ可能です。

というわけで、擬ユークリッド空間のままではテンソルの要求を満たせないので、違う空間に移ります。ただし、特別な場合としてユークリッド空間の定義が含まれるようにします。

先に出てくる単語の補足をしておきます。曲線のパラメータの簡単な説明をしておきます (数学の「ベクトル」参照)。曲線は点が連続に並ぶところで構成されており、その各点にはある実数が組み込まれているとされます。この実数のことを曲線のパラメータと呼び、このパラメータによる関数で曲線の座標を決めています。また、このパラメータは座標変換に対して不変です。簡単な例を上げると、$x^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta$ での θ のことです。この曲線をパラメーターで表せば $x=f(\theta), y=g(\theta)$ と表現されるだけです。

注：まだリーマン空間ではありません

計量は与えられてなく、ベクトルは与えられている空間とします。ベクトルとして定ベクトル ξ^i を用意します。これを違う座標系へ変換したものを $\overline{\xi}^i$ とし、$\overline{\xi}^i$ は定ベクトルではないとします。$\overline{\xi}^i$ の空間における動きを考えるために、パラメータ p による曲線に沿ってある点から隣接するある点まで行くとしたとき、どのような変化になるのか調べてみます。そのために $\overline{\xi}^i$ を p で微分します。ベクトルの変換

$$\overline{\xi}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\xi^k$$

を p で微分すれば、定ベクトル ξ^i は曲線に沿って定数のままなので

$$\frac{d\overline{\xi}^i}{dp} = \frac{d}{dp}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\xi^k = \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^l}\frac{dx^l}{dp}\xi^k$$

知りたいのは $\overline{\xi}^i$ での微小変化 $d\overline{\xi}^i$ なので、ξ^i との式でなく $\overline{\xi}^i$ による式に書き換えて

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}^i}{dp} &= (\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^m}\frac{d\overline{x}^m}{dp}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j})\overline{\xi}^j \qquad (\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}\overline{\xi}^j = \xi^k) \\ &= \overline{\Gamma}^i_{mj}\frac{d\overline{x}^m}{dp}\overline{\xi}^j \qquad (\overline{\Gamma}^i_{mj} = \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j})\end{aligned} \tag{1}$$

なので、曲線に沿ったベクトル成分の増加 $d\overline{\xi}^i$ は

$$d\bar{\xi}^i = \overline{\Gamma}^i_{mj} dx^m \bar{\xi}^j$$

と書くことができます。これで点 x から $x+dx$ へのベクトルの移動に対する一般的な規則を与えられました。$\overline{\Gamma}^i_{mj}$ が与えられた座標系の関数になっていると思えば、定ベクトルから始めたことを気にしないですみます。ここから ξ^i を一般的なベクトルとします。

このように定義される、点 x での ξ^i から点 $x+dx$ での $\xi^i+d\xi^i$ への移動に対する規則はアフィン空間 (affine space) と呼ばれるものの性質で、座標の線形変換に対して不変になっています。アフィン空間は計量が定義されていなく、点の移動が可能な空間のことです。ユークリッド空間はアフィン空間にユークリッド空間の計量の定義を入れた空間です。というわけで、計量とは無関係に分かる性質を見ていきます。この性質を見ていくことで、Γ が何か分かります。

今求めた移動則を使ってやると、微小移動した $\xi^i(x+dx)$ は曲線のパラメータを使わずに

$$\xi^i(x+dx) = \xi^i + d\xi^i = \xi^i + \Gamma^i_{mj} dx^m \xi^j$$

ξ^i はベクトルなので、$\xi^i+d\xi^i$ も同様にベクトルでなければいけません。なので、$\xi^i(x+dx)$ に対する変換は

$$\bar{\xi}^j(x+dx) = \xi^i(x+dx)\big(\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\big)_{x+dx}$$

というベクトルの変換則で計算されます。両辺を移動則によって書き換えれば

$$\bar{\xi}^j + \overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \bar{\xi}^a = (\xi^i + \Gamma^i_{ml} dx^m \xi^l)\big(\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\big)_{x+dx}$$

添え字がころころ変わってますが、ただ書き換えただけなので変な操作はしてません。右辺の微分を 1 次まででテーラー展開すると

$$\big(\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\big)_{x+dx} = \big(\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\big)_{x} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^i} dx^k$$

これに置き換えてやれば

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}^j + \overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \bar{\xi}^a &= (\xi^i + \Gamma^i_{ml} dx^m \xi^l)\big(\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^i} dx^k\big)\\
\bar{\xi}^j + \overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \bar{\xi}^a &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^i} dx^k \xi^i + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\Gamma^i_{ml} dx^m \xi^l + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^i}\Gamma^i_{ml} dx^m \xi^l dx^k\\
\overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \bar{\xi}^a &= \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^i}\xi^i dx^k + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\Gamma^i_{ml} dx^m \xi^l
\end{aligned}$$

微小部分を二つ含んでいる項は落としています。この右辺のダミーインデックス部分の添え字を書き換えると

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \overline{\xi}^a &= \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l} \xi^l dx^k + \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \Gamma^i_{kl} dx^k \xi^l \\
&= (\Gamma^i_{kl} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l}) \xi^l dx^k
\end{aligned}
$$

ほとんどの場合で上下に同じ添え字があるものはダミーインデックスです。細かく確かめたければ、反変ベクトルの変換則ではどこの添え字で和を取っているのか思い出しながらやればいいです。

$\xi^l dx^k$ に対する変換は

$$
\xi^l dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \overline{\xi}^a d\overline{x}^m
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^j_{ma} d\overline{x}^m \overline{\xi}^a &= (\Gamma^i_{kl} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l}) \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \overline{\xi}^a d\overline{x}^m \\
&= (\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \Gamma^i_{kl} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a}) d\overline{x}^m \overline{\xi}^a
\end{aligned}
$$

これから $\overline{\Gamma}$ は

$$
\overline{\Gamma}^j_{ma} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \Gamma^i_{kl} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a}
$$

という座標変換を受けていることが分かるので、これがベクトル (テンソル) の変換則を踏まえた Γ^j_{ma} に対する変換則です。この係数 Γ^j_{ma} をアフィン接続係数 (coefficients of affine connection) と呼びます。他にもアフィン接続とか単に接続とか呼ばれたりもします。そして、重要なことですがアフィン接続は変換則を見てわかるようにテンソルではないです。

また、第二項は偏微分の連鎖則から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial}{\partial x^k} (\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}) \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} &= \frac{\partial}{\partial \overline{x}^m} (\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}) \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{x}^m} (\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a}) - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^m \partial \overline{x}^a} \\
&= -\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^m \partial \overline{x}^a} \qquad (\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} = \delta^j_a)
\end{aligned}
$$

と変形して

$$
\overline{\Gamma}^j_{ma} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a} \Gamma^i_{kl} - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^m \partial \overline{x}^a}
$$

このような形にしている場合が多いです。

　次に、Γ^i_{kl} の変換則が成立しているとき、ベクトルの変換則も成立することを確かめます。曲線 $x(p)$ にそってベクトル $\xi^i(p)$ が動いているとし、始点は $p=0$、$\xi^i(0)$ とします。$\xi^i(0)$ はベクトルの変換則に従うとします。このとき、曲線上での関係 (1) から

$$\frac{d\xi^i}{dp} = \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{dp}\xi^l(p)$$

と与えたとき、$\xi^i(p)$ がベクトルとして変換されるかを確かめればいいです。今は $\xi^i(0)$ はベクトルの変換則に従うとしているので、任意の p に対して

$$\overline{\xi}^i(p) = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)$$

となればいいです。これを p で微分すれば、$\xi^j(p)$ も p の微分に引っかかるので

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\big(\overline{\xi}^i(p) - \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)\big) &= \frac{d\overline{\xi}^l}{dp} - \frac{d}{dp}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)\\
&= \overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\overline{\xi}^l - \frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^j\partial x^s}\frac{dx^s}{dp}\xi^j - \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\frac{d\xi^j}{dp}\\
&= \overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\overline{\xi}^l - \frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^t\partial x^s}\frac{dx^s}{dp}\xi^t - \Gamma^j_{st}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^s}{dp}\xi^t
\end{aligned}$$

Γ^j_{ma} が変換則

$$\overline{\Gamma}^j_{ma} = \frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}\Gamma^i_{kl} + \frac{\partial^2\overline{x}^j}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}$$

に従っているとすれば、Γ^i_{kl} は

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{kl} &= \frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^l}\overline{\Gamma}^j_{ma} - \frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^l}\frac{\partial^2\overline{x}^j}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}\\
&= \frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^l}\overline{\Gamma}^j_{ma} - \frac{\partial^2\overline{x}^j}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}
\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dp}\big(\overline{\xi}^i(p)-\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)\big)\\
&=\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\overline{\xi}^l-\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^t\partial x^s}\frac{dx^s}{dp}\xi^t-\Gamma^j_{st}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^s}{dp}\xi^t\\
&=\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\overline{\xi}^l-\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^t\partial x^s}\frac{dx^s}{dp}\xi^t-\big(\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^s}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^t}\overline{\Gamma}^i_{kl}-\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^s\partial x^t}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}\big)\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^s}{dp}\xi^t\\
&=\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\overline{\xi}^l-\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^t\partial x^s}\frac{dx^s}{dp}\xi^t+\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^s\partial x^t}\frac{dx^s}{dp}\xi^t-\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^t}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\xi^t\\
&=\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}(\overline{\xi}^l-\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^s}\xi^s)
\end{aligned}
$$

となり

$$\frac{d}{dp}\big(\overline{\xi}^i(p)-\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)\big)=\overline{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\overline{x}^k}{dp}\big(\overline{\xi}^l(p)-\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^s}\xi^s(p)\big)$$

これは

$$\frac{d}{dp}X^i(p)=A^i_l(p)X^l(p)$$

という形の微分方程式なので、連立の同次線形微分方程式です。初期条件は $p=0$ のときにベクトルの変換則に従うとしたものなので

$$\overline{\xi}^i(0)-\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(0)=0$$

そして、

$$\overline{\xi}^i(p)-\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j(p)=0$$

とすれば、初期条件を満たします。簡単な場合で言えば、1 つの微分方程式として、A を定数としたとき

$$\frac{d}{dp}X(p)=AX(p)$$

$$X(p)=Ce^{Ap}$$

において、$p=0$ で $X(0)=0$ なら $C=0$ になるので、$X(p)=0$ になるということです。というわけで、Γ^j_{ma} が変換則に対して、曲線にわたってベクトルの変換則が成立します。

　すぐに分かるアフィン接続 Γ の性質を並べると

- 座標の線形変換であるなら $\dfrac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^a \partial x^b}$ は 0 になるので Γ^i_{jk} はテンソル
- 変換 $\overline{\Gamma}^j_{ma} = \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m}\dfrac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a}\Gamma^i_{kl} + \dfrac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^k \partial x^l}\dfrac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^m}\dfrac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^a}$ での第二項部分は Γ^i_{jk} とは独立に存在しているので、Γ^i_{ab} に $(\Gamma^i_{ab})'$ のように添え字が同じになっている別の Γ^i_{jk} を引くことで第二項部分を除去できる
- $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$ のように下の添え字に対して対称

下の添え字に対して対称であることで分かることを求めます。座標変換を

$$\overline{x}^i = x^i + \frac{1}{2}A^i_{jk}x^j x^k$$

と書けるとします。$x^i = 0$ の微分は

$$(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j})_{x=0} = \delta^i_j$$

なので、この点での Γ の変換は

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^j_{ms} &= \delta^j_i \delta^\alpha_m \delta^\beta_s \Gamma^i_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(A^j_{\alpha\beta} + A^j_{\beta\alpha})\delta^\alpha_m \delta^\beta_s \\ &= \Gamma^j_{ms} + \frac{1}{2}(A^j_{ms} + A^j_{sm})\end{aligned}$$

Γ^j_{ms} は下の 2 つの添え字が対称になっているので、第二項から A^j_{ms} も下の 2 つの添え字が対称です。このとき、$\frac{1}{2}(A^j_{ms} + A^j_{sm}) = -\Gamma^j_{ms}$ となれば $\overline{\Gamma}^j_{ms} = 0$ になります。そうすると、$\overline{\Gamma}^j_{ms} d\overline{x}^m \overline{\xi}^s$ は 0 になるために、$d\overline{\xi}^i = 0$ になることを意味します。この $d\overline{\xi}^i$ は移動したあとの変化量に相当しているので、ある点から微小移動後に値が変わっていない状況になります。

これで分かるのは、Γ^i_{jk} が下の添え字に対して対称なので、ベクトルを微小移動しても値が変わらない状況を作れるということです。これは局所的には直線的な座標系が作れることを示しています。

今まで見てきたベクトル移動が定義される空間をアフィン空間と呼び、計量が定義されていない空間です。リーマン空間はこれに計量を定義した空間です。

- **平行移動**

ここまでは計量を出さずに進めてきましたが、ここで計量を組み込みます。そうすることでリーマン空間を作れます。

ユークリッド空間における平行移動は、ベクトルの長さと二つのベクトルの角度は変わらないという性質を持ちます。つまり、平行移動で内積が変わりません。このことから、曲がった空間での平行移動もこれらの性質を持たせて、二つのベクトルの内積が不変になるように組み立てます。

注意ですが、明確に言ってきませんでしたが、ここでの移動は微小移動のことで、平行移動も微小移動によって行われるものを指します。

二つのベクトル A^i, B^i を用意し、これらが曲線に沿って微小移動しているとします。このとき、曲線に沿って移動しても内積の値は変化しないとします (ベクトル自体は変わってもいい)。このことは曲線のパラメーター s の微分によって

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}A^iB^k)=0$$

と書けます (曲線のパラメーター s に対して内積が変化しなければ微分は 0)。計量を定義しているので、内積は計量テンソルによって与えられます。微分を作用させて

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}A^iB^k+g_{ik}\frac{dA^i}{ds}B^k+g_{ik}A^i\frac{dB^k}{ds}=0$$

s は曲線のパラメーターなので

$$\frac{dA^i}{ds}=\Gamma^i_{mj}\frac{dx^m}{ds}A^j$$

から

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}A^iB^k+g_{ik}\Gamma^i_{lj}\frac{dx^l}{ds}A^jB^k+g_{ik}A^i\Gamma^k_{lr}\frac{dx^l}{ds}B^r\\&=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}A^iB^k+g_{ik}\Gamma^i_{lj}A^jB^k+g_{ik}A^i\Gamma^k_{lr}B^r\end{aligned}$$

ダミーインデックス部分を操作して

$$0=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}A^iB^k+g_{rk}\Gamma^r_{li}A^iB^k+g_{ir}A^i\Gamma^r_{lk}B^k=\qquad\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+g_{rk}\Gamma^r_{li}+g_{ir}\Gamma^r_{lk}$$

これはベクトルとは無関係に Γ^i_{jk} の定義を与えます。この式の第一項での添え字 i,k,l は最初の内積の式と計量を微分する座標での添え字であるので、lik,kli のように並びを変えても同じ形の式が導けて

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+g_{ri}\Gamma^r_{kl}+g_{lr}\Gamma^r_{ki}=0\ ,\ \ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+g_{rl}\Gamma^r_{ik}+g_{kr}\Gamma^r_{il}=0$$

これらに対して、g_{ij} と Γ^k_{ij} の添え字 i,j は入れ替えても変わらないことから、添え字を反転させてこの 2 つを足すと

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+g_{ri}\Gamma^r_{kl}+2g_{lr}\Gamma^r_{ki}+g_{kr}\Gamma^r_{il}=0$$

これから最初の ikl の並びのものを引くと

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+2g_{lr}\Gamma^r_{ki}=0\\\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+2\Gamma_{lki}=0\\\Gamma_{lki}=&\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})\end{aligned}$$

l の添え字を上付きにするために計量を作用させれば

$$\Gamma^r_{ki}=-\frac{1}{2}g^{lr}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})$$

という Γ^r_{ki} の式が導けて、これが内積が与えられたときの平行移動でのアフィン接続 Γ^r_{ki} の定義になります。

表記法の話になりますが

$$[ik,l]=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})$$

これを第一種クリストッフェル記号 (Christoffel symbol of the first kind) と呼び

$$\left\{\begin{array}{c} j \\ i\ k \end{array}\right\}=g^{jl}[ik,l]$$

を第二種クリストッフェル記号 (Christoffel symbol of the second kind) と呼びます。これを使うとアフィン接続は

$$\Gamma^j_{ik}=-\left\{\begin{array}{c} j \\ i\ k \end{array}\right\}$$

と書くことができます。第一種、第二種クリストッフェル記号は頻繁に出てくるので覚えておくといいです。

表記上の注意ですが、本によっては

$$\Gamma^j_{ki}=\frac{1}{2}g^{lj}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})$$

のように Γ^r_{ki} 自体をここでの第二種クリストッフェル記号 $\{\ \}$ の定義にし、Γ^j_{ki} をクリストッフェル記号としています。なので、ここでも一般的な本と対応させるために、Γ^j_{ki} をクリストッフェル記号として

$$\Gamma^j_{ki}=\left\{\begin{array}{c} j \\ k\ \ i \end{array}\right\}=\frac{1}{2}g^{lj}(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})$$

と定義します (上での話での Γ^j_{ki} の符号が反転する)。なので、このときの変換則は

$$\overline{\Gamma}^j_{ma}=\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}\Gamma^i_{kl}-\frac{\partial^2\overline{x}^j}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}=\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^a}\Gamma^i_{kl}+\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial\overline{x}^m\partial\overline{x}^a}$$

となります。というわけで、２つのベクトルの内積が移動しても変化しないアフィン接続の定義を与えられました。

ベクトルの成分の増加 $d\xi^i$ に対する式は

$$d\xi^i = -\Gamma^j_{ik} dx^\alpha \xi^\beta$$

$$\frac{d\xi^i}{dp} = -\Gamma^i_{mj}\frac{dx^m}{dp}\xi^j$$

で与えられ、これが平行移動に対する法則になります。平行移動は曲線に依存して行われるものになっているので、同じ地点への平行移動を考えているときでも移動の経路（曲線）が違っていたら同じベクトルにはなるとは限らないです。

クリストッフェル記号を用いてアフィン接続を表せる空間がリーマン空間です。これでアフィン空間からリーマン空間になりました。ここで求めたリーマン空間での関係は「表記と定義」にまとめています。

ちなみにユークリッド空間での平行移動ではベクトルの長さもベクトル自体も変化しないので $\Gamma^r_{ik} = \left\{ \begin{matrix} r \\ i\ k \end{matrix} \right\} = 0$ です。

クリストッフェル記号 Γ_{ijk} と Γ_{jik} を足すと

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \frac{1}{2}g^l{}_i(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}) + \frac{1}{2}g^l{}_j(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}) \\
&= \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

となっているので

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{il}\Gamma^l_{jk} + g_{jl}\Gamma^l_{ik}$$

という関係式があります。縮約をとった Γ^i_{ji} は

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{jk} = g^{ki}\Gamma_{ijk} &= \frac{1}{2}g^{ki}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}) \\
&= \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

となります。2 行目から 3 行目へはダミーインデックスの文字を合わせているだけで、最後の行へは計量は対称 $g^{ij} = g^{ji}$ であることを使っています。