リーマン曲率テンソル・ビアンキの恒等式

一般相対性理論で主な計算対象となるリーマン曲率テンソルを定義します。ついでに、ビアンキの恒等式も求めています。
ギリシャ文字とローマ文字両方使いますが、両方とも $0\sim3$ です。

　まず空間がミンコフスキー計量 $(+1,-1,-1,-1)$ を持っている場合を考えます。この空間においてはクリストッフェル記号はあらゆるところで 0 です。これは共変微分が

$$A^{\alpha}_{||\beta}=A^{\alpha}_{|\beta}$$

となることを言っています。これは何階の微分であろうとも成り立つので

$$A^{\alpha}_{||\beta||\gamma}=A^{\alpha}_{|\beta|\gamma}$$

から

$$A^{\alpha}_{||\beta||\gamma}-A^{\alpha}_{||\gamma||\beta}=0$$

とできます。これを満たしていれば。その空間はミンコフスキー計量を持つことになり、テンソル形式で書かれているので、あらゆる座標系で成立します。これは大事なことで、一般相対論を考えていく上では、ミンコフスキー計量は局所的にどこでも成り立っているということを反映させています。
　この関係が成立しない、つまり共変微分の添え字の順序を入れ替えたときに差が 0 でなくなる場合を考える必要があります。
　空間をリーマン空間として、テンソル $t^{\alpha}{}_{\beta}$ の共変微分を

$$t^{\alpha}{}_{\beta}=A^{\alpha}_{||\beta}=A^{\alpha}_{|\beta}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}A^{\eta} \tag{1}$$

と与えます。これのさらに共変微分をとり

$$t^{\alpha}{}_{\beta||\gamma}=A^{\alpha}_{||\beta||\gamma}=t^{\alpha}{}_{\beta|\gamma}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\ \mu\end{matrix}\right\}t^{\mu}{}_{\beta}-\left\{\begin{matrix}\nu\\ \gamma\ \beta\end{matrix}\right\}t^{\alpha}{}_{\nu}$$

これに (1) を入れて

$$\begin{aligned}A^{\alpha}_{||\beta||\gamma}&=\left(A^{\alpha}_{|\beta}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}A^{\eta}\right)_{|\gamma}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\ \mu\end{matrix}\right\}\left(A^{\mu}_{|\beta}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}A^{\eta}\right)-\left\{\begin{matrix}\nu\\ \gamma\ \beta\end{matrix}\right\}t^{\alpha}{}_{\nu}\\ &=A^{\alpha}_{|\beta|\gamma}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}_{|\gamma}A^{\eta}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}A^{\eta}_{|\gamma}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\ \mu\end{matrix}\right\}A^{\mu}_{|\beta}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\ \mu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\mu\\ \beta\ \eta\end{matrix}\right\}A^{\eta}-\left\{\begin{matrix}\nu\\ \gamma\ \beta\end{matrix}\right\}t^{\alpha}{}_{\nu}\end{aligned}$$

β と γ を入れ替えた $A^\alpha_{||\gamma||\beta}$ は

$$A^\alpha_{||\gamma||\beta} = A^\alpha_{|\gamma|\beta} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} A^\eta + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} A^\eta_{|\beta} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} A^\mu_{|\gamma} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} A^\eta - \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \beta\ \gamma \end{array} \right\} t^\alpha{}_\nu$$

この 2 つの差を取ると

$$\begin{aligned}
A^\alpha_{||\beta||\gamma} - A^\alpha_{||\gamma||\beta} = {} & A^\alpha_{|\beta|\gamma} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\}_{|\gamma} A^\eta + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} A^\eta_{|\gamma} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} A^\mu_{|\beta} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} A^\eta - \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \gamma\ \beta \end{array} \right\} t^\alpha{}_\nu \\
& - A^\alpha_{|\gamma|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} A^\eta - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} A^\eta_{|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} A^\mu_{|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} A^\eta + \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \beta\ \gamma \end{array} \right\} t^\alpha{}_\nu \\
= {} & \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\}_{|\gamma} A^\eta + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} A^\eta - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} A^\eta - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} A^\eta \\
= {} & \Big(\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\}_{|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} \Big) A^\eta \\
= {} & -\Big(- \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\}_{|\gamma} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} \Big) A^\eta \\
= {} & -R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} A^\eta
\end{aligned}$$

下から二行目の ( ) 部分は商定理よりテンソルになり、この部分をリーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor)$R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma}$ と呼び、

$$R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta\ \gamma \end{array} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta\ \beta \end{array} \right\}_{|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \eta\ \beta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \eta\ \gamma \end{array} \right\}$$

と定義されます。わざわざ符号を反転させて定義しているのは、こっちの方で定義している場合が多いからです。リーマン曲率テンソルをリーマンテンソルと呼んでいきます。

見て分かるように、リーマンテンソルはクリストッフェル記号で構成されているので、アフィン接続と思えばそのままアフィン空間でも使用可能です。ただし、$R_{\alpha\eta\beta\gamma}$ のように添え字を下げると計量が出てくるのでアフィン空間では使用できなくなります。

というわけで、共変微分の添え字をひっくり返したものの差は、リーマンテンソルによって

$$A^\alpha_{||\beta||\gamma} - A^\alpha_{||\gamma||\beta} = -R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} A^\eta \tag{2}$$

となり、リーマン空間においてミンコフスキー計量を持つためには

$$R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} A^\eta = 0 \ \Rightarrow\ R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} = 0$$

であればいいことになります。ミンコフスキー計量では平坦な空間になるので、リーマンテンソルが 0 のとき平坦な空間になります。

これは何階のテンソルでも成立し、2 階テンソルの場合は

$$T^{\alpha\rho}_{||\beta||\gamma} - T^{\alpha\rho}_{||\gamma||\beta} = -R^{\alpha}{}_{\tau\beta\gamma}T^{\tau\rho} - R^{\rho}{}_{\tau\beta\gamma}T^{\alpha\tau}$$

となります。また、添え字を下げれば

$$A_{\alpha||\beta||\gamma} - A_{\alpha||\gamma||\beta} = -R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}$$

となり、これは計量が定義された空間（計量空間）で成り立ちます。

今は反変ベクトルから求めましたが、共変ベクトルで行えば

$$A_{\alpha||\beta||\gamma} - A_{\alpha||\gamma||\beta} = R^{\eta}{}_{\alpha\beta\gamma}A_{\eta}$$

として出てきます。

このようにして求められたものを曲率テンソルと呼ぶ理由を少し説明しておきます。今したことは、2 階共変微分の添え字をひっくり返したものの差を取るというものでした。これは、ベクトル A^i を点 P_0 から出発させ点 P_1 を経由して点 P_2 へと平行移動させたものと、点 P_0 から出発して点 P_1' を経由して点 P_2 へと平行移動させたものとの差に相当します (平行四辺形上を違う経路で移動させたときの差)。

A^i を P_0 から P_2 へ動かすためには、まず P_0 から P_1 への平行移動

$$A'^i(P_1) = A^i(P_0) - \Gamma^i_{kl}(P_0)A^l(P_0)dx^k_1$$

を行います。どの点かをはっきりさせるために変数に P_0, P_1 を書いています。dx^k_1 は P_0 と P_1 の微小距離です。そして、これを P_1 から P_2 への平行移動 (dx^k_2 は P_1 から P_2 への微小距離)

$$A'^i(P_2) = A'^i(P_1) - \Gamma^i_{kj}(P_1)A'^j(P_1)dx^k_2$$

に入れて、P_1 は P_0 から dx_1 離れているので、$\Gamma^i_{kj}(P_1)$ を dx_1 で展開して

$$\begin{aligned}
A'^i(P_2) &= A^i(P_0) - \Gamma^i_{kl}(P_0)A^l(P_0)dx^k_1 \\
&\quad - \big(\Gamma^i_{kj}(P_0) + \Gamma^i_{kj|d}(P_0)dx^d_1\big)\big(A^j(P_0) - \Gamma^j_{ab}A^a(P_0)dx^b_1\big)dx^k_2 \\
&= A^i - \Gamma^i_{kl}A^l dx^k_1 - \Gamma^i_{kj}A^j dx^k_2 \\
&\quad + \Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ab}A^a dx^b_1 dx^k_2 - \Gamma^i_{kj|d}A^j dx^d_1 dx^k_2 + \Gamma^i_{kj|d}\Gamma^j_{ab}A^a dx^d_1 dx^b_1 dx^k_2 \\
&= A^i - \Gamma^i_{kl}A^l(dx^k_1 + dx^k_2) + \big(\Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ab}A^a dx^b_1 dx^k_2 - \Gamma^i_{ka|b}A^a dx^b_1 dx^k_2\big) \\
&= A^i - \Gamma^i_{kl}A^l(dx^k_1 + dx^k_2) + (\Gamma^i_{kj}\Gamma^j_{ab} - \Gamma^i_{ka|b})A^a dx^b_1 dx^k_2
\end{aligned}$$

途中で dx の三次は無視しています。そして、P_0 から P_1' にいき P_2 に到達する経路でも同様にし、差をとればリーマンテンソルが出てきます。差は

$$(\Gamma^i_{ak|b} - \Gamma^i_{ab|k} + \Gamma^i_{lb}\Gamma^l_{ak} - \Gamma^i_{lk}\Gamma^l_{ab})A^a dx_1^b dx_2^k = R^i{}_{abk}A^a dx_1^b dx_2^k$$

となっており、( ) 部分はそのままリーマンテンソルの定義と一致しています。

このことから、違う経路をとったものが共変微分の添え字をひっくり返したものに相当するために、上でのようにして導出されています。行ったことは、平行移動を使って違う経路で同じ地点を目指すというものなので、空間が平坦であるならその差は 0 になっているはずです (ただの平行四辺形上を動いていると思えばいい)。平坦でないなら 0 でないので、そこに現れるリーマンテンソルを曲率として与えています。

ちなみに、同じ発想で場の量子論ではゲージ場に対する共変微分を作ります (場の量子論の「電磁場〜ゲージ不変性〜」参照)。

リーマンテンソルはクリストッフェル記号とその微分で書かれているので、計量の 2 階微分になっています。このことは計量を使ってクリストッフェル記号を書き換えれば直接見れて

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\rho\lambda} &= g_{\alpha\mu}R^\mu{}_{\beta\rho\lambda} \\
&= g_{\alpha\mu}(\Gamma^\mu_{\beta\lambda|\rho} - \Gamma^\mu_{\beta\rho|\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}) \\
&= g_{\alpha\mu}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}g^{\mu\nu}(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}g^{\mu\nu}(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}\Big) \\
&= g_{\alpha\mu}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\rho\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\nu}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\lambda\partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}\Big) \\
&= g_{\alpha\mu}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}g^\eta{}_\nu(\frac{\partial g_{\eta\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\eta}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\nu}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}g^\eta{}_\nu(\frac{\partial g_{\eta\rho}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\eta}) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}\Big) \\
&= g_{\alpha\mu}\Big(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\Gamma_{\nu\beta\lambda} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\nu\beta\rho} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\beta}) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\beta}) + g_{\alpha\mu}(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\Gamma_{\nu\beta\lambda} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\nu\beta\rho}) - g_{\alpha\mu}(\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho} - \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda})
\end{aligned}$$

ここで

$$g_{\alpha\mu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda}$$

という関係を使えば

$$g_{\alpha\mu}(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\Gamma_{\nu\beta\lambda} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\nu\beta\rho}) = -(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho})$$

さらに

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dx^\alpha} = g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} + g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
-(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}) =& -\Big((g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\rho}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho})\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-(g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\lambda}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda})\Gamma^\mu_{\beta\rho}\Big) \\
=& -(g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}-g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}) \\
=& -(g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}-g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&-g_{\alpha\mu}(\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho}-\Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda})-(g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}-g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}) \\
&= -g_{\alpha\mu}(\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\beta\rho}-\Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda})-(g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\nu\rho}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}+g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\beta\rho}-g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}) \\
&= -(g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}-g_{\mu\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho})
\end{aligned}$$

というわけで

$$R_{\alpha\beta\rho\lambda}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\beta}+\frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho\partial x^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\rho}}{\partial x^\lambda\partial x^\beta})-g_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\rho}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}+g_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\beta\rho}$$

となって、計量の 2 階微分とクリストッフェル記号の積という形をしています。
リーマンテンソルの関係をいくつか見ていきます。

- **添え字の対称性**

リーマンテンソルの添え字の入れ替えを見ていきます。すぐわかるのは、リーマンテンソル $R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma}$ は三番目と四番目の添え字 β,γ に対して反対称です。他の対称性を見ていくために、内積

$$\phi=g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu \tag{3}$$

を使います。ϕ はスカラーなので

$$\phi_{||\beta}=\phi_{|\beta}$$

これをもう一回微分したものを反対称化すると (「テンソルの対称、反対称」参照)

$$\phi_{\{|\beta|\gamma\}}=\frac{1}{2}(\phi_{||\beta||\gamma}-\phi_{||\gamma||\beta})=\frac{1}{2}(\phi_{|\beta|\gamma}-\phi_{|\gamma|\beta})=0$$

これより、$\phi_{||\beta||\gamma}-\phi_{||\gamma||\beta}=0$ が分かります。そして、$\phi_{||\beta}$ は (3) から

$$\phi_{||\beta}=g_{\mu\nu}A^\mu_{||\beta}A^\nu+g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu_{||\beta}=2g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu_{||\beta}$$

計量の共変微分は 0 というのを使ってます。これのさらに共変微分をとると

$$\phi_{||\beta||\gamma}=2g_{\mu\nu}A^{\mu}_{||\gamma}A^{\nu}_{||\beta}+2g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}_{||\beta||\gamma}$$

というわけで

$$\begin{aligned}\phi_{||\beta||\gamma}-\phi_{||\gamma||\beta}&=2g_{\mu\nu}A^{\mu}_{||\gamma}A^{\nu}_{||\beta}+2g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}_{||\beta||\gamma}-2g_{\mu\nu}A^{\mu}_{||\beta}A^{\nu}_{||\gamma}-2g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}_{||\gamma||\beta}\\&=2g_{\mu\nu}A^{\mu}(A^{\nu}_{||\beta||\gamma}-A^{\nu}_{||\gamma||\beta})=0\end{aligned}$$

( ) 部分は、(2) からリーマンテンソルによる部分なので

$$\phi_{||\beta||\gamma}-\phi_{||\gamma||\beta}=-2g_{\mu\alpha}A^{\mu}R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma}A^{\eta}=-2A_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma}A^{\eta}$$

$\phi_{||\beta||\gamma}-\phi_{||\gamma||\beta}$ は 0 なので

$$-2R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma}A_{\alpha}A^{\eta}=0$$

というわけで

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\alpha}A^{\eta}=0 \tag{4}$$

となります。ここでリーマン空間のある点をとって、A^{α} が単位ベクトルで、i 成分だけが 1 で他の成分は 0 とすると (i の和は取らない)

$$R_{ii\beta\gamma}=0$$

なので、1 番目と 2 番目の添え字による行列では対角成分が 0 です。また、(4) は添え字の付け替えから

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}A^{\alpha}=\frac{1}{2}(R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\eta\alpha\beta\gamma})A^{\eta}A^{\alpha}=0 \tag{5}$$

ここで、A^{α} の成分のうち 2 つだけが 1 として、それを $A^a, A^b=1$ とすれば

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}A^{\alpha}=R_{aa\beta\gamma}A^aA^a+R_{ab\beta\gamma}A^aA^b+R_{ba\beta\gamma}A^bA^a+R_{bb\beta\gamma}A^bA^b$$

対角成分は 0 なので、第一項と第四項は消えることから、(5) は

$$R_{ab\beta\gamma}+R_{ba\beta\gamma}=0$$

よって、対角成分は 0、入れ替えで符号が変わることから

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}=-R_{\eta\alpha\beta\gamma}$$

となり、添え字の 1 番目と 2 番目に対して反対称です。

「テンソルの対称、反対称」の最後に出てきた

$$\{\{A_{\alpha||\beta}\}_{||\gamma}\}=\frac{1}{2}(\{A_{\alpha||\beta||\gamma}\}-\{A_{\beta||\alpha||\gamma}\})=\frac{1}{2}\{A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\beta||\alpha||\gamma}\}$$

を持ってきます。{ } は反対称化の記号です。これは 0 なので

$$\{A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\beta||\alpha||\gamma}\}=0$$

第二項の添え字を動かせば

$$\{A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\alpha||\gamma||\beta}\}=0$$

これと (2) を比べれば

$$\{A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\alpha||\gamma||\beta}\}=-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}\}=0$$

となります。よって

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=0$$

(α,β,γ) は反対称化する添え字を表し、この場合では η は含まれていません。展開すれば

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{1}{3!}(R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}-R_{\beta\eta\alpha\gamma}A^{\eta}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}A^{\eta}-R_{\gamma\eta\beta\alpha}A^{\eta}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}A^{\eta}-R_{\alpha\eta\gamma\beta}A^{\eta})$$

見て分かるように A^{η} は無関係なので

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}A^{\eta}=0$$

として外に出せます。よって、A^{η} は任意なので、リーマンテンソルは反対称化に対して

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=0$$

これは、リーマンテンソルの対称性によって

$$\begin{aligned}\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)} &= \frac{1}{6}(R_{\alpha\eta\beta\gamma}-R_{\beta\eta\alpha\gamma}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}-R_{\gamma\eta\beta\alpha}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}-R_{\alpha\eta\gamma\beta})\\ &= \frac{1}{6}(2R_{\alpha\eta\beta\gamma}+2R_{\beta\eta\gamma\alpha}+2R_{\gamma\eta\alpha\beta})=0\end{aligned}$$

なので

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}=0 \tag{6}$$

となります。添え字を変えて

$$\{R_{\eta\alpha\beta\gamma}\}_{(\eta,\beta,\gamma)}=0$$

とした場合では、同様に

$$R_{\eta\alpha\beta\gamma}+R_{\beta\alpha\gamma\eta}+R_{\gamma\alpha\eta\beta}=0 \tag{7}$$

(6) と (7) の差は

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}-R_{\eta\alpha\beta\gamma}-R_{\beta\alpha\gamma\eta}-R_{\gamma\alpha\eta\beta}=2R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}-R_{\beta\alpha\gamma\eta}-R_{\gamma\alpha\eta\beta}=0$$

１番目と２番目の添え字の反対称性を使って

$$\begin{aligned}0 &= 2R_{\alpha\eta\beta\gamma}-R_{\eta\beta\gamma\alpha}-R_{\eta\gamma\alpha\beta}-R_{\alpha\beta\eta\gamma}-R_{\alpha\gamma\beta\eta}\\ &= 2R_{\alpha\eta\beta\gamma}-(R_{\eta\beta\gamma\alpha}+R_{\alpha\beta\eta\gamma})-(R_{\eta\gamma\alpha\beta}+R_{\alpha\beta\eta\gamma})\end{aligned}$$

( ) 部分は

$$\{R_{\alpha\beta\eta\gamma}\}_{(\alpha,\eta,\gamma)}=0 \ \Rightarrow\ R_{\eta\beta\gamma\alpha}+R_{\alpha\beta\eta\gamma}=-R_{\gamma\beta\alpha\eta}$$

$$\{R_{\alpha\gamma\beta\eta}\}_{(\alpha,\beta,\eta)}=0 \ \Rightarrow\ R_{\eta\gamma\alpha\beta}+R_{\alpha\gamma\beta\eta}=-R_{\beta\gamma\eta\alpha}$$

として添え字を新しく書き換えて出てくるものに対応しているので

$$2R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\gamma\beta\alpha\eta}+R_{\beta\gamma\eta\alpha}=0$$

第二項と第三項で添え字の 1 番目と 2 番目、3 番目と 4 番目が反対称であることを使うと

$$2(R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\gamma\beta\alpha\eta})=0$$

また、第二項で 1 番目と 2 番目の反対称性を使うと

$$2(R_{\alpha\eta\beta\gamma}-R_{\beta\gamma\alpha\eta})=0$$

よって

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\alpha\eta}$$

となり、1,2 番目と 3,4 番目を入れ替えに対して対称です。

というわけでリーマンテンソルに対する対称、反対称は $R_{\alpha\eta\beta\gamma}$ の添え字 $\alpha\eta,\beta\gamma$ の組の中での交換が反対称となり、$\alpha\eta,\beta\gamma$ ごとの交換では対称なので

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}=-R_{\eta\alpha\beta\gamma}$$

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}=-R_{\alpha\eta\gamma\beta}$$

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\alpha\eta}$$

さらに、反対称化させたとき

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=R_{\alpha\eta\beta\gamma}+R_{\beta\eta\gamma\alpha}+R_{\gamma\eta\alpha\beta}=0$$

もしくは、α と η をひっくり返して

$$\{R_{\eta\alpha\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=R_{\eta\alpha\beta\gamma}+R_{\eta\beta\gamma\alpha}+R_{\eta\gamma\alpha\beta}=0$$

とも書けます。

リーマンテンソルの独立成分を数えます。対称性を何も考えないリーマンテンソル $R_{\alpha\eta\beta\gamma}$ の成分の数は $4\times4\times4\times4=256$ 個です。これに、まず 1 番目と 2 番目は反対称になっていることを使えば、対角成分の 4 つが消え、残りも半分決めれば残りの半分が決まるので、最初の 4×4 =16 成分であるものが $(4\times4-4)/2=6$

成分までおちます。この時点で $6\times4\times4=96$ 個まで減ります。3 番目と 4 番目での反対称性を使えば、同様に 6 成分までおちるので $6\times6=36$ 個まで減ります。さらに、36 個の成分は 6×6 行列と考え、$\alpha\eta, \beta\gamma$ の交換で対称なので対角成分の 6 個と残りの $(36-6)/2=15$ 個を足した $6+15=21$ 個になります。そして、最後の $\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)}=0$ よりさらに 1 個減って 20 個になります。

- **ビアンキの恒等式**

　リーマンテンソルの対称性を使ってリーマンテンソルの共変微分の関係を導きます。リーマンテンソルは

$$A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\beta||\alpha||\gamma}=-R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}$$

で与えられるので、これの共変微分をとって

$$(A_{\alpha||\beta||\gamma}-A_{\beta||\alpha||\gamma})_{||\nu}=-R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}A^{\eta}-R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}$$

これを β,γ,ν に対して反対称化すると

$$\{A_{\alpha||\beta||\gamma||\nu}-A_{\beta||\alpha||\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}=-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A^{\eta}-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}$$

β,γ,ν についての偶置換であるなら入れ替えて問題ないので

$$\{(A_{\alpha||\nu})_{||\beta||\gamma}-(A_{\alpha||\nu})_{||\gamma||\beta}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}=-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A^{\eta}-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)} \tag{8}$$

と書き換えます。

　2 階のテンソル $A_{\alpha||\nu}$ に対してのリーマンテンソルの式

$$(A_{\alpha||\nu})_{||\beta||\gamma}-(A_{\alpha||\nu})_{||\gamma||\beta}=-R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}-R_{\nu\eta\beta\gamma}A_{\alpha}^{\ ||\eta}$$

を反対称化すると

$$\{(A_{\alpha||\nu})_{||\beta||\gamma}-(A_{\alpha||\nu})_{||\gamma||\beta}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}=-\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}-\{R_{\nu\eta\beta\gamma}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A_{\alpha}^{\ ||\eta}$$

これの左辺が (8) の式と等しいので

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A^{\eta}+\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}=\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}A^{\eta}_{\ ||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}+\{R_{\nu\eta\beta\gamma}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A_{\alpha}^{\ ||\eta}$$
$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A^{\eta}=\{R_{\nu\eta\beta\gamma}\}_{(\beta,\gamma,\nu)}A_{\alpha}^{\ ||\eta}$$

そして、反対称化したとき

$$\{R_{\nu\eta\beta\gamma}\}_{(\beta,\gamma,\nu)} = 0$$

から

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu}\}_{(\beta,\gamma,\nu)} = R_{\alpha\eta\{\beta\gamma||\nu\}} = R_{\alpha\eta\beta\gamma||\nu} + R_{\alpha\eta\nu\beta||\gamma} + R_{\alpha\eta\gamma\nu||\beta} = 0$$

これをビアンキの恒等式 (Bianchi identities) と呼んでいて、重要な式です。重要なことが分かりやすい例は、アインシュタインテンソルとの関連です。これは「リッチテンソル」で示します。