リーマンテンソルの成分

計量を設定し、カルタンの方程式を利用してリーマンテンソルの成分を求めます。
複雑なことはしないですが、単純に面倒な計算をしていきます。

計算がゴチャゴチャしている上に記号をいくつか作っているので、先にまとめておくと

$$
\begin{aligned}
&f_{:A} = f_{|A} + q_A f_{|1}\ ,\ (fg)_{:A} = fg_{:A} + gf_{:A} \\
&\mathcal{D}_A f = f_{:A} + q_{A|1} f \\
&Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}\ ,\ Q_{AB} = -Q_{BA} \\
&\Psi_A = \psi_{:A} + q_{A|1}
\end{aligned}
$$

使用する計量 $g_{\mu\nu}$ の形として

$$
ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(dx^1 - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2
$$

これは静的、定常的、球対称、軸対称を考慮して一般化した計量で、ここに対称性を入れていくことで、その対称性を持った計量に変えていけます (dx^1 は動径 dr でなく角度の $d\varphi$ に対応させています)。$\mu_2, \mu_3, \nu, \psi, q_2, q_3$ は t, x^1, x^2, x^3 を変数に持つまだ決定されていない関数です。また、反変での計量は

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
e^{-2\nu} & \omega e^{-2\nu} & 0 & 0 \\
\omega e^{-2\nu} & \omega^2 e^{-2\nu} - e^{-2\psi} - q_2^2 e^{-2\mu_2} - q_3^2 e^{-2\mu_3} & -q_2 e^{-2\mu_2} & -q_3 e^{-2\mu_3} \\
0 & -q_2 e^{-2\mu_2} & -e^{-2\mu_2} & 0 \\
0 & -q_3 e^{-2\mu_3} & 0 & -e^{-2\mu_3}
\end{pmatrix}
$$

計量の形を

$$
dt = -idx^4\ ,\ \nu = \mu_4\ ,\ \omega = iq_4
$$

として、虚数時間を用いたものに変えて

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& -e^{2\mu_4}(dx^4)^2 - e^{2\psi}(dx^1 - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - q_4 dx^4)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2 \\
=& -\sum_A e^{2\mu_A}(dx^A)^2 - e^{2\psi}(dx^1 - \sum_A q_A dx^A)^2
\end{aligned}
$$

としたものを使います。A は $2,3,4$ で、1 は含めません。虚数時間を使ったことで計量の符号が $(-,-,-,-)$ になっています。このときテトラッドは $(-,-,-,-)$ の計量として $(\mu = 1,2,3,4)$

$$e_{(1)\mu} = (-e^{\psi}, q_2 e^{\psi}, q_3 e^{\psi}, q_4 e^{\psi})\ ,\ e_{(2)\mu} = (0, -e^{\mu_2}, 0, 0)$$
$$e_{(3)\mu} = (0, 0, -e^{\mu_3}, 0)\ ,\ e_{(4)\mu} = (0, 0, 0, -e^{\mu_4})$$
$$e^{\mu}_{(1)} = (e^{-\psi}, 0, 0, 0)\ ,\ e^{\mu}_{(2)} = (q_2 e^{-\mu_2}, e^{-\mu_2}, 0, 0)$$
$$e^{\mu}_{(3)} = (q_3 e^{-\mu_3}, 0, e^{-\mu_3}, 0)\ ,\ e^{\mu}_{(4)} = (q_4 e^{-\mu_4}, 0, 0, e^{-\mu_4})$$

と選べます。

次にカルタンの方程式は基底によって構成されているので、1-形式の基底として dx^1, dx^A によって

$$\omega^A = -e_{(A)\mu}dx^{\mu} = e^{\mu_A}dx^A\ ,\ \omega^1 = -e_{(1)\mu}dx^{\mu} = e^{\psi}(dx^1 - \sum_A q_A dx^A)$$

として

$$\omega^A = e^{\mu_A}dx^A\ ,\ \omega^1 = e^{\psi}(dx^1 - \sum_A q_A dx^A) \tag{1}$$

と選びます。これによってテトラッドになっています (計量は $(-,-,-,-)$ の定数)。ω^A を外微分すると

$$\begin{aligned} d\omega^A =&\ d(e^{\mu_A}dx^A) = \sum_B \frac{\partial e^{\mu_A}}{\partial x^B}dx^B \wedge dx^A + \frac{\partial e^{\mu_A}}{\partial x^1}dx^1 \wedge dx^A \\ =&\ \sum_B e^{\mu_A}\mu_{A|B}dx^B \wedge dx^A + e^{\mu_A}\mu_{A|1}dx^1 \wedge dx^A \end{aligned}$$

添え字の B は A と同じく 2〜4 です。dx^A は、(1) を逆にすればいいので

$$dx^A = e^{-\mu_A}\omega^A\ ,\ dx^1 = e^{-\psi}\omega^1 + \sum_A e^{-\mu_A}q_A\omega^A$$

これを使って

$$\begin{aligned} d\omega^A =&\ \sum_B e^{\mu_A}e^{-\mu_A}e^{-\mu_B}\mu_{A|B}\omega^B \wedge \omega^A + e^{\mu_A}e^{-\mu_A}\mu_{A|1}(e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B}q_B\omega^B) \wedge \omega^A \\ =&\ \sum_B e^{-\mu_B}\mu_{A|B}\omega^B \wedge \omega^A + \mu_{A|1}(e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B}q_B\omega^B) \wedge \omega^A \\ =&\ \sum_B e^{-\mu_B}(\mu_{A|B} + q_B\mu_{A|1})\omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi}\mu_{A|1}\omega^1 \wedge \omega^A \end{aligned}$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
d\omega^1 &= d(e^{\psi}(dx^1 - \sum_A q_A dx^A)) \\
&= e^{\psi}\big(\sum_B \psi_{|B} dx^B \wedge dx^1 - \sum_{A,B} \psi_{|B} q_A dx^B \wedge dx^A - \sum_{A,B} q_{A|B} dx^B \wedge dx^A + \psi_{|1} dx^1 \wedge dx^1 \\
&\qquad - \sum_A \psi_{|1} q_A dx^1 \wedge dx^A - \sum_A q_{A|1} dx^1 \wedge dx^A\big) \\
&= e^{\psi}\Big(\sum_B \psi_{|B} e^{-\mu_B} \omega^B \wedge (e^{-\psi}\omega^1 + \sum_A e^{-\mu_A} q_A \omega^A) - \sum_{A,B} \psi_{|B} q_A e^{-\mu_B} e^{-\mu_A} \omega^B \wedge \omega^A \\
&\qquad + \psi_{|1}(e^{-\psi}\omega^1 + \sum_A e^{-\mu_A} q_A \omega^A) \wedge (e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B} q_B \omega^B) \\
&\qquad - \sum_{A,B} q_{A|B} e^{-\mu_A} e^{-\mu_B} \omega^B \wedge \omega^A - \sum_A \psi_{|1} q_A e^{-\mu_A} (e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B} q_B \omega^B) \wedge \omega^A \\
&\qquad - \sum_A q_{A|1} e^{-\mu_A} (e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B} q_B \omega^B) \wedge \omega^A\Big) \\
&= \sum_B \psi_{|B} e^{-\mu_B} \omega^B \wedge \omega^1 + \sum_{A,B} \psi_{|B} q_A e^{\psi-\mu_B-\mu_A} \omega^B \wedge \omega^A - \sum_{A,B} \psi_{|B} q_A e^{\psi-\mu_B-\mu_A} \omega^B \wedge \omega^A \\
&\qquad + \psi_{|1} e^{-\psi} \omega^1 \wedge \omega^1 + \sum_B \psi_{|1} e^{-\mu_B} q_B \omega^1 \wedge \omega^B + \sum_A \psi_{|1} e^{-\mu_A} q_A \omega^A \wedge \omega^1 + \psi_{|1} \sum_{A,B} e^{\psi} e^{-\mu_A-\mu_B} q_B q_A \omega^A \wedge \omega^B \\
&\qquad - \sum_{A,B} q_{A|B} e^{\psi-\mu_B-\mu_A} \omega^B \wedge \omega^A - \sum_A \psi_{|1} q_A e^{-\mu_A} \omega^1 \wedge \omega^A - \sum_{A,B} \psi_{|1} q_A q_B e^{\psi-\mu_A-\mu_B} \omega^B \wedge \omega^A \\
&\qquad - \sum_A q_{A|1} e^{-\mu_A} \omega^1 \wedge \omega^A - \sum_{A,B} q_B q_{A|1} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} \omega^B \wedge \omega^A \\
&= \sum_A e^{-\mu_A} (\psi_{|A} + q_A \psi_{|1} + q_{A|1}) \omega^A \wedge \omega^1 + \sum_A \psi_{|1} e^{-\mu_A} q_A \omega^1 \wedge \omega^A - \sum_A \psi_{|1} e^{-\mu_A} q_A \omega^1 \wedge \omega^A \\
&\qquad + \psi_{|1} \sum_{A,B} e^{\psi} e^{-\mu_A-\mu_B} q_B q_A \omega^B \wedge \omega^A - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} (q_{A|B} + q_A q_B \psi_{|1} + q_B q_{A|1}) \omega^B \wedge \omega^A \\
&= \sum_A e^{-\mu_A} (\psi_{|A} + q_A \psi_{|1} + q_{A|1}) \omega^A \wedge \omega^1 - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} (q_{B|A} + q_A q_{B|1}) \omega^A \wedge \omega^B
\end{aligned}
$$

計算するときは、外微分の反対称性と縮約している添え字の書き換えを使っています ($\omega^B \wedge \omega^A$ の入れ替えでは外微分の反対称性でなく添え字の書き換えを行っています)。

利便性のために新しい記号として

$$
f_{:A} = f_{|A} + q_A f_{|1}\ ,\ (fg)_{:A} = f g_{:A} + g f_{:A}
$$

というのを定義します。そうすると

$$
d\omega^A = \sum_B e^{-\mu_B} \mu_{A:B} \omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi} \mu_{A|1} \omega^1 \wedge \omega^A \tag{2a}
$$

$$
d\omega^1 = \sum_A e^{-\mu_A} (\psi_{:A} + q_{A|1}) \omega^A \wedge \omega^1 - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} (q_{B:A}) \omega^A \wedge \omega^B \tag{2b}
$$

ねじれが 0 でのカルタンの方程式は

$$\boldsymbol{de}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{e}^k = 0$$

で与えられ、今の場合では基底を ω^A, ω^1 と選んでいるので、これに対応して

$$d\omega^1 = -\sum_A {\omega^1}_A \wedge \omega^A \tag{3a}$$

$$d\omega^A = -\sum_B \omega^A_{\ B} \wedge \omega^B - \omega^A_{\ 1} \wedge \omega^1 \tag{3b}$$

ここでの ${\omega^i}_j$ は、ω^A, ω^1 が計量が定数のテトラッドを構成していることから計量の外微分 dg_{ij} が 0 なので

$${\omega^j}_i = -{\omega^i}_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

という反対称になります。そして (2a),(2b) を使うと (3a),(3b) は

$$\sum_A e^{-\mu_A}(\psi_{:A} + q_{A|1})\omega^A \wedge \omega^1 - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B}(q_{B:A})\omega^A \wedge \omega^B = -\sum_A {\omega^1}_A \wedge \omega^A \tag{4a}$$

$$\sum_B e^{-\mu_B}\mu_{A:B}\omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi}\mu_{A|1}\omega^1 \wedge \omega^A = -\sum_B \omega^A_{\ B} \wedge \omega^B - \omega^A_{\ 1} \wedge \omega^1 \tag{4b}$$

この二つの両辺を比較することで ${\omega^1}_A$ と $\omega^A_{\ B}$ は

$${\omega^1}_A = e^{-\mu_A}(\psi_{:A} + q_{A|1})\omega^1 + \frac{1}{2}\sum_B e^{\psi-\mu_A-\mu_B}(q_{A:B} - q_{B:A})\omega^B - e^{-\psi}\mu_{A|1}\omega^A \tag{5a}$$

$$\omega^A_{\ B} = e^{-\mu_B}\mu_{A:B}\omega^A - e^{-\mu_B}\mu_{B:A}\omega^B - \frac{1}{2}\sum_B e^{\psi-\mu_A-\mu_B}(q_{A:B} - q_{B:A})\omega^1 \tag{5b}$$

(4a) と (4b) を足して比較することで (5a) が出てき、(5b) は (5a) を (4b) に入れて両辺を比較すればいいです。1/2 は A, B に対して和を取っているので、その重複を消すものです。また、添え字の書き換えと反対称性の両方を使って比較しています。${\omega^i}_j$ は反対称であるために、全成分は

$${\omega^1}_2\ ,\ {\omega^1}_3\ ,\ {\omega^1}_4\ ,\ {\omega^2}_3\ ,\ {\omega^3}_4\ ,\ {\omega^4}_2$$

になります。

これでリーマンテンソルの成分を表しているもう一つのカルタンの方程式

$$\frac{1}{2}{R^i}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l = d{\omega^i}_j + {\omega^i}_k \wedge {\omega^k}_j$$

を計算するのに必要なものが揃いました。また、$d\omega^i{}_j$ の計算に必要な、$F\omega^1, F\omega^A$ のように x^1 から x^4 の関数である F がいる場合の外微分は

$$
\begin{aligned}
d(F\omega^A) &= \sum_B e^{-\mu_A-\mu_B}(Fe^{\mu_A})_{:B}\omega^B\wedge\omega^A + e^{-\psi-\mu_A}(Fe^{\mu_A})_{|1}\omega^1\wedge\omega^A \\
d(F\omega^1) &= \sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(Fe^{\psi})\omega^A\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}\sum_{A,B}Fe^{\psi-\mu_A-\mu_B}(q_{A:B}-q_{B:A})\omega^A\wedge\omega^B
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$\mathcal{D}_A$ は

$$
\mathcal{D}_A f = f_{:A} + q_{A|1}f
$$

としています。Fe^{μ_A} のように F と exp を一纏めにすればいいだけです。$d(F\omega^1)$ の最後の項は (5a) に合わせるために変形させただけです。

他にも

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{A,B}(q_{A:B}-q_{B:A})\omega^A\wedge\omega^B &= \frac{1}{2}\sum_{A,B}(q_{B:A}\omega^B\wedge\omega^A - q_{B:A}\omega^A\wedge\omega^B) \\
&= -\sum_{A,B}q_{B:A}\omega^A\wedge\omega^B
\end{aligned}
$$

となっています。$d\omega^1{}_2$ をこれらを使って計算します。

$\omega^1{}_2$ は

$$
\begin{aligned}
\omega^1{}_2 &= e^{-\mu_2}(\psi_{:2}+q_{2|1})\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{2|1}\omega^2 + \frac{1}{2}\sum_B e^{\psi-\mu_2-\mu_B}(q_{2:B}-q_{B:2})\omega^B \\
&= e^{-\mu_2}(\psi_{:2}+q_{2|1})\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{2|1}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}(q_{2:3}-q_{3:2})\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}(q_{2:4}-q_{4:2})\omega^4 \\
&= e^{-\mu_2}\Psi_2\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{2|1}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\omega^4
\end{aligned}
$$

Q_{AB} と Ψ_A は

$$
Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}\ ,\ Q_{AB} = -Q_{BA}\ ,\ \Psi_A = \psi_{:A} + q_{A|1}
$$

としています。(6) を使って外微分をすると

$$
\begin{aligned}
d\omega^1{}_2 &= d(e^{-\mu_2}\Psi_2\omega^1) - d(e^{-\psi}\mu_{2|1}\omega^2) + \frac{1}{2}d(e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^3) + \frac{1}{2}d(e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\omega^4) \\
&= \sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A \wedge \omega^1 + \frac{1}{2}\sum_{A,B}(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_A-\mu_B}Q_{AB}\omega^A \wedge \omega^B \\
&\quad - \sum_B e^{-\mu_2-\mu_B}(e^{-\psi}\mu_{2|1}e^{\mu_2})_{:B}\omega^B \wedge \omega^2 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sum_B e^{-\mu_3-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:B}\omega^B \wedge \omega^3 + e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^3) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sum_B e^{-\mu_4-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:B}\omega^B \wedge \omega^4 + e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^4) \\
&= \sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A \wedge \omega^1 + \frac{1}{2}\sum_B(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_2-\mu_B}Q_{2B}\omega^2 \wedge \omega^B \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_B(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_3-\mu_B}Q_{3B}\omega^3 \wedge \omega^B + \frac{1}{2}\sum_B(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_4-\mu_B}Q_{4B}\omega^4 \wedge \omega^B \\
&\quad - \sum_B e^{-\mu_2-\mu_B}(e^{-\psi}\mu_{2|1}e^{\mu_2})_{:B}\omega^B \wedge \omega^2 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sum_B e^{-\mu_3-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:B}\omega^B \wedge \omega^3 + e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^3) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sum_B e^{-\mu_4-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:B}\omega^B \wedge \omega^4 + e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^4) \\
&= \sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A \wedge \omega^1 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^3) + \frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{|1}\omega^1 \wedge \omega^4) \\
&\quad + \sum_B(\frac{1}{2}(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_2-\mu_B}Q_{2B} + e^{-\mu_2-\mu_B}(e^{-\psi}\mu_{2|1}e^{\mu_2})_{:B})\omega^2 \wedge \omega^B \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_B((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_3-\mu_B}Q_{3B} - e^{-\mu_3-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:B})\omega^3 \wedge \omega^B \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_B((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_4-\mu_B}Q_{4B} - e^{-\mu_4-\mu_B}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:B})\omega^4 \wedge \omega^B
\end{aligned}
$$

B の和を取って

$$
\begin{aligned}
d\omega^1{}_2 = &\sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A\wedge\omega^1 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1}\omega^1\wedge\omega^2 \\
&+\frac{1}{2}(e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{|1}\omega^1\wedge\omega^3)+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{|1}\omega^1\wedge\omega^4) \\
&+(\frac{1}{2}(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}+e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{-\psi}\mu_{2|1}e^{\mu_2})_{:3})\omega^2\wedge\omega^3 \\
&+(\frac{1}{2}(e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}+e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{-\psi}\mu_{2|1}e^{\mu_2})_{:4})\omega^2\wedge\omega^4 \\
&+\frac{1}{2}((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}-e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:2})\omega^3\wedge\omega^2 \\
&+\frac{1}{2}((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}-e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:4})\omega^3\wedge\omega^4 \\
&+\frac{1}{2}((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}-e^{-\mu_4-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:2})\omega^4\wedge\omega^2 \\
&+\frac{1}{2}((e^{-\mu_2}\Psi_2)e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}-e^{-\mu_4-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:3})\omega^4\wedge\omega^3 \\
= &\sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathcal{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A\wedge\omega^1 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1}\omega^1\wedge\omega^2 \\
&+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{|1}\omega^1\wedge\omega^3+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{|1}\omega^1\wedge\omega^4 \\
&+\Big(\Psi_2 e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}+e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{:3}+\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:2}\Big)\omega^2\wedge\omega^3 \\
&+\Big(\Psi_2 e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}Q_{24}+e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{:4}+\frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:2}\Big)\omega^2\wedge\omega^4 \\
&+\Big(\Psi_2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}-\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:4}+\frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:3}\Big)\omega^3\wedge\omega^4
\end{aligned}
$$

$d\omega^1{}_2$ を求めたので、これを使ってリーマンテンソルの成分を出します。
$R^1{}_{2kl}$ は

$$
\frac{1}{2}R^1{}_{2kl}\omega^k\wedge\omega^l = d\omega^1{}_2+\omega^1{}_k\wedge\omega^k{}_2 = d\omega^1{}_2+\omega^1{}_3\wedge\omega^3{}_2+\omega^1{}_4\wedge\omega^4{}_2
$$

そうすると、後必要なものは $\omega^1{}_3\wedge\omega^3{}_2$ と $\omega^1{}_4\wedge\omega^4{}_2$ です。$\omega^1{}_3,\omega^3{}_2,\omega^1{}_4,\omega^4{}_2$ は $\omega^1{}_2$ と同様にして

$$
\begin{aligned}
{\omega^1}_2 &= e^{-\mu_2}\Psi_2\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{2|1}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\omega^4 \\
{\omega^1}_3 &= e^{-\mu_3}\Psi_3\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{3|1}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}\omega^2 \\
{\omega^1}_4 &= e^{-\mu_4}\Psi_4\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{4|1}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}\omega^3 \\
{\omega^2}_3 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^1 + e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^2 - e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^3 \\
{\omega^3}_4 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\omega^1 + e^{-\mu_4}\mu_{3:4}\omega^3 - e^{-\mu_3}\mu_{4:3}\omega^4 \\
{\omega^4}_2 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^1 + e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^4 - e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^2
\end{aligned}
$$

ついでに、${\omega^1}_3 \wedge {\omega^2}_3$ と ${\omega^1}_4 \wedge {\omega^4}_2$ を求めれば

- ${\omega^1}_3 \wedge {\omega^2}_3$

$$
\begin{aligned}
{\omega^1}_3 \wedge {\omega^2}_3 = & (e^{-\mu_3}\Psi_3\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{3|1}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}\omega^2) \\
& \wedge (-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^1 + e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^2 - e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^3) \\
= & e^{-\mu_3}\Psi_3 e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^1\wedge\omega^2 - e^{-\mu_3}\Psi_3 e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^1\wedge\omega^3 \\
& + \frac{1}{2}e^{-\psi}\mu_{3|1}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}\omega^3\wedge\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{3|1}e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^3\wedge\omega^2 \\
& - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}Q_{34}\omega^4\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^4\wedge\omega^2 \\
& - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^4\wedge\omega^3 \\
& - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^2\wedge\omega^1 - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^2\wedge\omega^3 \\
= & (e^{-\mu_3}\Psi_3 e^{-\mu_3}\mu_{2:3} + \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23})\omega^1\wedge\omega^2 \\
& - (e^{-\mu_3}\Psi_3 e^{-\mu_2}\mu_{3:2} + \frac{1}{2}e^{-\psi}\mu_{3|1}e^{\psi-\mu_2-\mu_3})\omega^1\wedge\omega^3 \\
& + (e^{-\psi}\mu_{3|1}e^{-\mu_3}\mu_{2:3} - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}e^{-\mu_2}\mu_{3:2})\omega^2\wedge\omega^3 \\
& - \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}Q_{34}\omega^4\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^4\wedge\omega^2 \\
& - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^4\wedge\omega^3 \\
= & \Big(e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3} - \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}(Q_{23})^2\Big)\omega^1\wedge\omega^2 \\
& - \Big(e^{-\mu_2-\mu_3}\Psi_3\mu_{3:2} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}\mu_{3|1}\Big)\omega^1\wedge\omega^3 \\
& + \Big(e^{-\psi-\mu_3}\mu_{3|1}\mu_{2:3} + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-2\mu_2}Q_{23}\mu_{3:2}\Big)\omega^2\wedge\omega^3 \\
& + \frac{1}{4}e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{34}\omega^1\wedge\omega^4 - \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{2:3}\omega^2\wedge\omega^4 \\
& + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{3:2}\omega^3\wedge\omega^4
\end{aligned}
$$

- ${\omega^1}_4 \wedge {\omega^4}_2$

$$
\begin{aligned}
\omega^1{}_4 \wedge \omega^4{}_2 = &(e^{-\mu_4}\Psi_4\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{4|1}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}\omega^3) \\
&\quad \wedge (-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^1 + e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^4 - e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^2) \\
&= e^{-\mu_4}\Psi_4 e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^1\wedge\omega^4 - e^{-\mu_4}\Psi_4 e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^1\wedge\omega^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-\psi}\mu_{4|1}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^4\wedge\omega^1 + e^{-\psi}\mu_{4|1}e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^4\wedge\omega^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^2\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^2\wedge\omega^4 \\
&\quad - \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^3\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^3\wedge\omega^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^3\wedge\omega^2 \\
&= (e^{-\mu_4}\Psi_4 e^{-\mu_2}\mu_{4:2} - \frac{1}{2}\mu_{4|1}e^{-\mu_4-\mu_2}Q_{42})\omega^1\wedge\omega^4 \\
&\quad + (\frac{1}{4}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42} - e^{-\mu_4}\Psi_4 e^{-\mu_4}\mu_{2:4})\omega^1\wedge\omega^2 \\
&\quad + (\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}e^{-\mu_2}\mu_{4:2} - e^{-\psi}\mu_{4|1}e^{-\mu_4}\mu_{2:4})\omega^2\wedge\omega^4 \\
&\quad - \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^3\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^3\wedge\omega^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^3\wedge\omega^2 \\
&= \Big(e^{-\mu_2-\mu_4}\Psi_4\mu_{4:2} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}\mu_{4|1}Q_{24}\Big)\omega^1\wedge\omega^4 \\
&\quad + \Big(\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}(Q_{24})^2 - e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4}\Big)\omega^1\wedge\omega^2 \\
&\quad - \Big(\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-2\mu_2}Q_{24}\mu_{4:2} + e^{-\psi-\mu_4}\mu_{4|1}\mu_{2:4}\Big)\omega^2\wedge\omega^4 \\
&\quad + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3}Q_{24}Q_{34}\omega^1\wedge\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}\mu_{4:2}Q_{43}\omega^3\wedge\omega^4 \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_3}\mu_{2:4}Q_{43}\omega^2\wedge\omega^3
\end{aligned}
$$

例えば、リーマンテンソルの成分 $R^1{}_{212}$ を求めたいなら

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^1{}_{2kl}\omega^k\wedge\omega^l &= \frac{1}{2}R^1{}_{212}\omega^1\wedge\omega^2 + \frac{1}{2}R^1{}_{213}\omega^1\wedge\omega^3 + \cdots \\
&= d\omega^1{}_2 - \omega^1{}_3\wedge\omega^2{}_3 + \omega^1{}_4\wedge\omega^4{}_2
\end{aligned}
$$

なので、$\omega^1\wedge\omega^2$ の係数を引っ張り出してきて

$$
\begin{aligned}
R^1{}_{212} = &-e^{-\psi-\mu_2}\mathcal{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2) - e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3} - e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4} \\
&- e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}(Q_{23})^2 + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}(Q_{24})^2
\end{aligned}
$$

このように求まります。

R_{1212} にしたければ、今の場合 $(-,-,-,-)$ で添え字を上げ下げ出来るのでマイナスがつくだけです。これでかなりの数のリーマンテンソルの成分を書き出せるようになります。例えば R_{1313} は

$$\begin{aligned}-R_{1313} = & -e^{-\psi-\mu_3}\mathcal{D}_3(e^{\psi-\mu_3}\Psi_3) - e^{-2\mu_2}\Psi_2\mu_{3:2} - e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{3:4} \\ & -e^{-\psi-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_3}\mu_{3|1})_{|1} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_2}(Q_{32})^2 + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_4}(Q_{34})^2\end{aligned}$$

このように添え字の 2 と 3 を入れ替えることで求めることができます。他にも例えば、R_{1213} を求めて 3 と 4 を入れ替えることで R_{1214} は求まります。

このようにして求められない残りは

$$d\omega^2{}_3\ ,\ \omega^1{}_2\wedge\omega^1{}_3\ ,\ \omega^3{}_4\wedge\omega^4{}_2$$

さえ求めてしまうことで、同様の方法 (例えば R_{2334} から R_{3224} へは 2 と 3 を入れ替える) で全ての成分が求められます。

というわけで、R_{1212} からは

$$\begin{aligned}-R_{1212} = & -e^{-\psi-\mu_2}\mathcal{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2) - e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3} - e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4} \\ & -e^{-\psi-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2|1})_{|1} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}(Q_{23})^2 + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}(Q_{24})^2 \\ & \Rightarrow\ R_{1313}\ ,\ R_{1414}\end{aligned}$$

R_{2323} からは

$$\begin{aligned}-R_{2323} = & -e^{-\mu_2-\mu_3}\big((e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2:3})_{:3} + (e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2})_{:2}\big) - e^{-2\mu_4}\mu_{3:4}\mu_{2:4} \\ & -\frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}(Q_{23})^2 - e^{-2\psi}\mu_{2|1}\mu_{3|1} \\ & \Rightarrow\ R_{2424}\ ,\ R_{3434}\end{aligned}$$

R_{1213} からは

$$\begin{aligned}-R_{1213} = & -e^{-\psi-\mu_3}\mathcal{D}_3(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2) + e^{-\mu_2-\mu_3}\Psi_3\mu_{3:2} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3}Q_{43}Q_{42} \\ & +\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}\big(Q_{23|1} + Q_{23}(\mu_3-\mu_2+\psi)_{|1}\big) \\ & \Rightarrow\ R_{1214}\ ,\ R_{1314}\end{aligned}$$

R_{1223} からは

$$-R_{1223} = e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}(\Psi_2 - \frac{1}{2}\mu_{3:2}) + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:2}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_3}Q_{43}\mu_{2:4} + e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{|1})_{:3} - e^{-\psi-\mu_3}\mu_{3|1}\mu_{2:3}$$
$$\Rightarrow\ R_{1224}\ ,\ R_{1334}\ ,\ R_{1332}\ ,\ R_{1442}\ ,\ R_{1443}$$

R_{2334} からは

$$-R_{2334} = e^{-\mu_2-\mu_4}\big(\mu_{3:2:4} + \mu_{3:2}(\mu_3 - \mu_2)_{:4} - \mu_{3:4}\mu_{4:2}\big)$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{34} - \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{3|1}$$
$$\Rightarrow\ R_{3224}\ ,\ R_{3442}$$

$R_{1234} =$ からは

$$-R_{1234} = \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}((e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:3} - (e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:4}) + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}(2\Psi_2 - \mu_{3:2} - \mu_{4:2})$$
$$\Rightarrow\ R_{1423}\ ,\ R_{1342}$$

R_{1234} の動きが少し特殊です。これでリーマンテンソルの成分を求めることが出来ました。