テンソル解析

一般相対性理論では座標系の変換に対して物理法則は不変という要請があるために、これに合った数学を使う必要があり、それがテンソルです。ここではテンソルの定義や関係をまとめてます (特殊相対性理論は知ってること前提)。
ほとんどが定義を並べているだけなので、より数学的な背景は「ベクトル、1-形式、テンソル」や「多様体」を見てください。
添え字の注意ですが、「テンソルの対称、反対称」までは特に明言しない限り、空間 (もしくは時空) の次元を任意に取ります。「測地線方程式」以降では逆に、明言しない限り 4 次元空間を使います。

一般相対性理論では、重力が存在しても任意の座標系で物理法則は同じになることが要求されています。この要求のためにテンソルが必要になります (座標系に依存しなく、曲がった空間にも使える数学)。これは共変性のことで (例えば運動方程式の形が変換の前後で同じ)、テンソルによる方程式は共変性を持ちます。

しかし、一般相対性理論を勉強する最初の頃はテンソルの関係をなんとなく暗記して、実際に使われているのを見ながらどんなものか知っていけばいいと思います。いきなりテンソルで悩むのは専門的に勉強していこうと思わない限り時間の無駄です。実際、一般相対性理論の結果としての物理を理解することが目的なら、テンソル解析なんかすっ飛ばしていいです。これを実践している本がジェームズ・ハートル著 (訳：牧野伸義) の「重力 アインシュタインの一般相対性理論入門」です。この本だとテンソルの細かい説明が最後に出てきます。

テンソルに関する話を並べていきます。

- **座標変換**

  座標変換は 2 つの座標系をつなぐ変換です。例えば 4 次元空間において、x^0, x^1, x^2, x^3 によって与えられる座標系と、x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 によって与えられる座標系とを

$$x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$$x^\mu = g^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

このように繋ぐものとして座標変換は定義されます。f^μ, g^μ はそれぞれが独立な 4 つの関数です。簡単に言えば、座標 x^μ によって表現される空間上のある点を違う座標 x'^μ で書くということです。さらに別の言い方をすれば、同じ点を異なった基底で見ていると言えます。

また、添え字が上についてる x^μ は 3 次元ユークリッド空間で言えば、$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ に対応します。

x^μ, x'^μ の偏微分は

$$\sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \delta^j_k \ , \ \sum_i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \delta^j_k$$

という関係を持っています。δ^i_j はクロネッカーデルタで

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

と定義されます (添え字を上付きと下付きにしてるのは、共変、反変というより、慣習としての意味合いが強いです)。これは、偏微分の逆は分母と分子を入れ替えたものではないという性質からすぐには分かりづらいですが、座標変換の定義から

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial g^i(x')}{\partial x^j} = \sum_k \frac{\partial g^i(x')}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}$$

となることから分かります。例えば、2 次元直交座標 (x,y) から 2 次元極座標 (r,θ) への変換を見ると、実際に

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^1} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\ ,\ \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta\ ,\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

となっています。また、x' から x への変換における $n\times n$ 行列のヤコビアン $(i,j=0,1,2,\ldots,n)$

$$|J(x,x')| = |\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{vmatrix}$$

からも分かります。$|\ |$ は行列式です。$|J(x,\overline{x})| = |J(x,x')||J(x',\overline{x})|$ という性質に、$x=\overline{x}$、$\partial x^j/\partial x'^i$ を行列 A、$\partial x'^i/\partial x^k$ を行列 A' として入れれば

$$|\frac{\partial x^j}{\partial x^k}| = |A||A'| = |AA'| = |\sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}|$$

となることからも分かります。

座標変換において、座標変換でのヤコビアン $|\partial x^i/\partial x'^j|$ と $|\partial x'^i/\partial x^j|$ が 0 にならないことが要求されます。0 になってしまうと線形代数の話から分かるように逆変換が出来ず、片方の座標系からもう一方への座標系への変換が一方通行になってしまうからです。

- **スカラー**

空間に存在する任意の点 x における値 $f(x)$ はどんな座標系で見ようとも同じ点であるかぎり不変とされるのがスカラーです。これが最も単純な座標系に依存しない不変量です。

スカラーの座標を座標系 (x) から座標系 $(\overline{x})$ に変換したときの値は、関数 f でなく違う関数 $\overline{f}$ によって表現されますが

$$f(x) = \overline{f}(\overline{x})$$

という関係を持ちます。これによって座標系に依存しない不変量であることが表現されます。ちなみに、このように $f(x)$ と表されるものをスカラー場と呼びます。

例えば、線素 (line element)ds の 2 乗は、計量テンソル g_{ik} によって

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k$$

と与えられ、計量テンソルの項で触れますが、座標変換に対して不変であるためにスカラーです。

- **反変ベクトル**

座標系（x）でのある点のベクトル x^i と、そこから微小移動させた点 $x^i + dx^i$ を考えます。差 dx^i が、違う座標系 $(\overline{x})$ においてどう表現されるのかは、座標変換の定義から

$$d\overline{x}^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} dx^j$$

という変換則によって表されます。

x^i は座標を表すものなので、次にこの座標を変数に持つベクトル $V^i(x)$ を考えます (ベクトル場)。dx^i と同じように、座標系 (x) でのベクトル $V^i(x)$ と座標系 $(\overline{x})$ でのベクトル $\overline{V}^i(\overline{x})$ が

$$\overline{V}^i = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} V^j$$

このような変換で表せるものを反変ベクトル (contravariant vector) と呼びます。当たり前ですが、これを逆向きに書けば

$$V^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} \overline{V}^j$$

となります。

- **共変ベクトル**

適当なスカラー $f(x)$ を用意します。これの $\partial f(x)/\partial x^i$ の変換は偏微分の規則から

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^j} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^j} = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}^j}$$

となります。$(f(x) = \overline{f}(\overline{x}))$。そして、これと同じ変換則

$$\overline{V}_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} V_j$$

$$V_i = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \overline{V}_j$$

で表されるものを共変ベクトル (covariant vector) と呼びます。

微分 $\partial/\partial x^i$ は共変ベクトル、$\partial/\partial x_i$ は反変ベクトルの変換規則に従います。微分では $\partial/\partial x^i$ の添え字は x^i のように上付きになっていますが、共変ベクトルなので実際には下付きです。共変と反変をはっきりさせるために記号として $\partial/\partial x^i = \partial_i$、$\partial/\partial x_i = \partial^i$ というのがよく使われます。

- **反変ベクトルと共変ベクトルの内積**

共変ベクトル A_i、反変ベクトル B^i の内積は

$$P = \sum_i A_i B^i$$

と書くことができます。これに対して、座標変換したときの内積

$$\overline{P} = \sum_i \overline{A}_i \overline{B}^i$$

がどうなるのか求めます。共変と反変の変換則から

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} B^j = \sum_{i,j,k} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} A_k B^j \quad (\overline{A}_i = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k \ , \ \overline{B}^i = \sum_j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} B^j)$$

この微分部分は座標変換の項で出てきたように

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j = \sum_i \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}$$

として、クロネッカーデルタになります。添え字の j がクロネッカーデルタの下についているように、微分演算子 $\partial/\partial x^j$ は、添え字が下付きの量であるというのには注意してください ($\partial/\partial x_j$ では上付き)。

よって、内積は

$$\overline{P} = \sum_{j,k} \delta^k_j A_k B^j = \sum_j A_j B^j = P \quad (\delta^k_j A_k = A_j)$$

となり、変換の前後で同じです。内積は座標変換で不変なのでスカラーです。

- **アインシュタインの規約**

　添え字に対する和の記号 Σ が大量に出てきて煩わしいので

$$\overline{V}_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} V_j \ \Rightarrow\ \overline{V}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} V_j$$

として、Σ を省くことをアインシュタインの規約と言います。和を取っている添え字 j のことをダミーインデックス (dummy index) と言い、そうでない添え字をフリーインデックス (free index) と言います。ダミーとついているのは

$$\overline{V}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} V_j = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} V_k$$

のように添え字の文字を $j \to k$ としても結果に何も影響を与えないからです。なので、ダミーインデックスの文字は計算の途中に好き勝手に変えていいです。

　また、一般相対論でアインシュタインの規約が行われるのは一般的に添え字が上下に現れるときで、別の例として ds^2 では

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k \Rightarrow ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

のように書けます。定義によっては添え字が上下に分かれていない時にも Σ を省いて書いてあるものもあるので気をつけたほうがいいです。

　アインシュタインの規約は便利なので他の分野で使われています。

- **テンソル**

　あからさまに分かりづらいですが

$$P = (T^{i_1 i_2 \cdots i_a}_{j_1 j_2 \cdots j_b})(A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \cdots A^{(a)}_{i_a})(B^{j_1}_{(1)} B^{j_2}_{(2)} \cdots B^{j_b}_{(b)})$$

として多重積を作ります。左辺の P はスカラーで、右辺で $(T)(A\cdots)(B\cdots)$ のように括弧をつけているのは区別をはっきりさせるためです。$A^{(1)}_{i_1}$ は (1) でのベクトルの i_1 成分のことを表します。なので、$A^{(1)}$ と $A^{(2)}$ は違うベクトルで、下についている添え字がベクトルの成分を表わしています。この式を満たすような $T^{i_1 i_2 \cdots i_a}_{j_1 j_2 \cdots j_b}$ のことを $(a+b)$ 階テンソル (tensor of rank (a+b)) と言います。例えば、$T^{i_1 i_2}$ を 2 階の反変テンソル、$T_{j_1 j_2}$ を 2 階の共変テンソル、$T^{i_1}_{j_1}$ を 2 階の混合テンソルと言います。一般に l 階の反変テンソルを $(l, 0)$ 型、k 階の共変テンソルを $(0, k)$ 型、混合テンソルでは $(l.k)$ 型と言います。0 階のテンソルはスカラーです。線素

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

での計量 g_{ik} は 2 階共変テンソルです。

ここでははっきりと分からない注意をしておきます。$\boldsymbol{v}$ をベクトル、v_i をベクトルの成分と言うように、T をテンソル、$T^{i_1 i_2 \cdots i_a}_{j_1 j_2 \cdots j_b}$ をテンソルの成分と言います。そして、ベクトルが座標変換に対して不変と言うときは $\boldsymbol{v}$ を指すように、テンソルは座標変換に対して不変と言うときは T のことを指します (「ベクトル、1-形式、テンソル」参照)。しかし、テンソルの座標変換に対する不変性は今与えた変換則に従うものをテンソルと定義することと同じで、大抵は変換則からテンソルかどうか判別するので、実用上は気にする必要がないです。

計量テンソルの細かい話もしておきます。テンソルは

$$P = T_{ik} B^i_{(1)} B^k_{(2)}$$

として定義されており、(1),(2) と付いているようにこの二つは違うベクトルとされています。dx^i, dx^k は添え字が違うだけで同じ反変ベクトルなので、微妙にテンソルの定義が異なっています。実際にうなのかは、$dx_{(1)}, dx_{(2)}$ の任意の二つのベクトルによって dx が作られているとして計算してみればわかって

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(dx^i_{(1)} + dx^i_{(2)})(dx^k_{(1)} + dx^k_{(2)}) \\ &= g_{ik} dx^i_{(1)} dx^k_{(1)} + g_{ik} dx^i_{(2)} dx^k_{(2)} + 2 g_{ik} dx^i_{(1)} dx^k_{(2)} \end{aligned}$$

第一項、第二項はスカラーと分かります。一方で、左辺はスカラーなので、第三項もスカラーでなくてはならないことから、g_{ik} は 2 階の共変テンソルとなります。

- **テンソルの変換則**

テンソルの変換は

$$\begin{aligned} &(\overline{T}^{i_1 i_2 \cdots i_a}_{j_1 j_2 \cdots j_b})(\overline{A}^{(1)}_{i_1} \cdots \overline{A}^{(a)}_{i_a})(\overline{B}^{j_1}_{(1)} \cdots \overline{B}^{j_b}_{(b)}) \\ &\qquad = (T^{i_1 i_2 \cdots i_a}_{j_1 j_2 \cdots j_b})(A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \cdots A^{(a)}_{i_a})(B^{j_1}_{(1)} B^{j_2}_{(2)} \cdots B^{j_b}_{(b)}) \end{aligned}$$

となるように行われます。これの左辺に共変と反変ベクトルの変換則を適用させれば

$$\begin{aligned} &(\overline{T}^{i_1 \cdots i_a}_{j_1 \cdots j_b})(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial \overline{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_a}}{\partial \overline{x}^{i_a}})(A^{(1)}_{m_1} A^{(2)}_{m_2} \cdots A^{(a)}_{m_a})(\frac{\partial \overline{x}^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{j_b}}{\partial x^{n_b}})(\overline{B}^{n_1}_{(1)} \cdots \overline{B}^{n_b}_{(b)}) \\ &= (T^{m_1 \cdots m_a}_{n_1 \cdots n_b})(A^{(1)}_{m_1} \cdots A^{(a)}_{m_a})(B^{n_1}_{(1)} \cdots B^{n_a}_{(b)}) \end{aligned}$$

右辺の添え字は自由に変えられるので、こうしても問題ないです。そうすると

$$\overline{T}^{i_1 \cdots i_a}_{j_1 \cdots j_b}(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial \overline{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_a}}{\partial \overline{x}^{i_a}})(\frac{\partial \overline{x}^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{j_b}}{\partial x^{n_b}}) = T^{m_1 \cdots m_a}_{n_1 \cdots n_b}$$

これに

$$(\frac{\partial\overline{x}^{k_1}}{\partial x^{m_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{k_a}}{\partial x^{m_a}})(\frac{\partial x^{n_1}}{\partial\overline{x}^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{n_b}}{\partial\overline{x}^{l_b}})$$

を掛けてやれば

$$\overline{T}^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}=(\frac{\partial\overline{x}^{k_1}}{\partial x^{m_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{k_a}}{\partial x^{m_a}})(\frac{\partial x^{n_1}}{\partial\overline{x}^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{n_b}}{\partial\overline{x}^{l_b}})T^{m_1\cdots m_a}_{n_1\cdots n_b}$$

となり、これがテンソルの変換則になります。例えば

$$\overline{T}^{ij}_{k}=\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^a}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial\overline{x}^k}T^{ab}_c$$

となっています。ついでに線形性より

$$aT^{ab}_c+bS^{ab}_c=U^{ab}_c$$

このように添え字が等しいもの同士を足せばまたテンソルになります (a,b は任意の定数)。

特に変なことでもなく話の流れから当たり前のことですが、この変換則からわかるように、もしテンソル T と T' がある座標系で等しかったら (テンソルの成分でなくテンソル)、他のあらゆる座標系においても T と T' は等しくなります。こういったことから、テンソルだと分かっているいくつかの量が等しいことを導きたいなら、最も証明しやすい座標系を選ぶことが可能です。

- **テンソル積**

テンソル同士の積である

$$G^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma}=T^{\alpha\beta}_{\gamma}S^{\mu\nu}$$

というものを考えます。これがある座標系では

$$\overline{G}^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma}=\overline{T}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{S}^{\mu\nu}$$

になっているとして、テンソルの変換則を使って

$$\overline{T}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{S}^{\mu\nu}=\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^\gamma}T^{ij}_k\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^l}\frac{\partial\overline{x}^\nu}{\partial x^m}S^{lm}$$

G に変えれば

$$\overline{T}^{\alpha\beta}_{\gamma}\overline{S}^{\mu\nu}=\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^\gamma}\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^l}\frac{\partial\overline{x}^\nu}{\partial x^m}G^{ijlm}_k$$

なので

$$\overline{G}^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma} = \frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial\overline{x}^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial\overline{x}^{\mu}}{\partial x^{l}}\frac{\partial\overline{x}^{\nu}}{\partial x^{m}}\frac{\partial x^{k}}{\partial\overline{x}^{\gamma}}G^{ijlm}_{k}$$

となることがわかります。これによって、2つのテンソルによる $T^{\alpha\beta}_{\gamma}S^{\mu\nu} = G^{\alpha\beta\mu\nu}_{\gamma}$ はテンソルと示せたことになります。このようなテンソル同士の積はテンソル積と呼ばれます (もっと数学的な定義は「補足：多様体」参照)。もっと単純なのはベクトル V_i, W_j によるテンソル積は 2 階のテンソル T_{ij} となります。

- **テンソルの分解**

　n 次元空間で階数が $q > 1$ のテンソルは、q 個によるベクトルのテンソル積を足していくという形で書けます。そして、その分解されたテンソルのベクトル積の最低数は n^{q-1} となっています。証明は省きます。

　例えば、4 次元における 2 階のテンソルは

$$T^{ik} = A^{i}_{(1)}B^{k}_{(1)} + A^{i}_{(2)}B^{k}_{(2)} + A^{i}_{(3)}B^{k}_{(3)} + A^{i}_{(4)}B^{k}_{(4)}$$

と書けます (4 次元なので、$4^{2-1} = 4$ 項出てくる)。ここでも ( ) のついた添え字は違うベクトルを表します。また、3 階の混合テンソルであれば

$$T^{ik}_{j} = A^{i}_{(1)}B^{k}_{(1)}C^{(1)}_{j} + A^{i}_{(2)}B^{k}_{(2)}C^{(2)}_{j} \cdots + A^{i}_{(16)}B^{k}_{(16)}C^{(16)}_{j}$$

と書けます。($4^{3-1} = 16$)

- **縮約**

　テンソルとして

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_{a-1}\mu}_{j_1 j_2 \cdots j_{b-1}\mu}$$

のように添え字の一つが上下で等しいものを作ります。アインシュタインの規約から、μ の和を取るので、μ は消えて 2 階低いテンソルになります（$a + b - 2$）。このことを縮約（contraction）と言います。2 階低くなることは、変換

$$\overline{T}^{i_1 \cdots i_{a-1}\mu}_{j_1 \cdots j_{b-1}\mu} = \Big(\frac{\partial\overline{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial\overline{x}^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\frac{\partial\overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha_a}}\Big)\Big(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\overline{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial\overline{x}^{j_{b-1}}}\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial\overline{x}^{\mu}}\Big)T^{\alpha_1 \cdots \alpha_a}_{\beta_1 \cdots \beta_b}$$

を見れば分かります。これに出てきている μ の部分は

$$\frac{\partial\overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha_a}}\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial\overline{x}^{\mu}} = \delta^{\beta_b}_{\alpha_a}$$

というように潰れ、クロネッカーデルタによって $\beta_b = \alpha_a = \nu$ となるので

$$\overline{T}^{i_1\cdots i_{a-1}\mu}_{j_1\cdots j_{b-1}\mu} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \overline{x}^{j_{b-1}}}T^{\alpha_1\cdots\alpha_{a-1}\nu}_{\beta_1\cdots\beta_{b-1}\nu}$$

これから、階数が $(a-1)+(b-1)=a+b-2$ となります。具体的に書くと

$$S^{i_1\cdots i_{a-1}}_{j_1\cdots j_{b-1}} = T^{i_1 i_2\cdots i_{a-1}\nu}_{j_1 j_2\cdots j_{b-1}\nu}$$

また、縮約は Σ 記号を省かずに書くと

$$A^j_{kl} = \sum_i B^{ij}_{ikl}$$

となっています。

- **商定理** (Quotient Theorem)
  ある任意のベクトル V^{j_b} があり

$$S^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_{b-1}} = T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}V^{j_b}$$

としたとき、$S^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_{b-1}}$ がテンソルなら $T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$ もテンソルです。一般的には、任意のテンソル $R^{j_b\cdots j_\nu}_{i_a\cdots i\mu}$ として

$$S^{i_1\cdots i_{a-1}}_{j_1\cdots j_{b-1}} = (T^{i_1\cdots i_{a-1}i_a\cdots i_\mu}_{j_1\cdots j_{b-1}j_b\cdots j_\nu})(R^{j_b\cdots j_\nu}_{i_a\cdots i\mu})$$

がテンソルなら、$T^{i_1\cdots i_{a-1}i_a\cdots i_\mu}_{j_1\cdots j_{b-1}j_b\cdots j_\nu}$ はテンソルになります。簡単に示しておきます。
簡単にするために

$$S_{a_1 a_2\cdots a_n} = T_{a_1\cdots a_n b}V^b$$

の場合を使います。$S_{a_1 a_2\cdots a_n}$ がテンソルなら、テンソルの変換則から

$$\begin{aligned}
\overline{T}_{a_1\cdots a_n b}\overline{V}^b &= T_{i_1\cdots i_n j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \overline{x}^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial \overline{x}^{a_n}}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b}V^k\frac{\partial \overline{x}^b}{\partial x^k} \\
&= T_{i_1\cdots i_n j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \overline{x}^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial \overline{x}^{a_n}}V^k\delta^j_k \\
&= T_{i_1\cdots i_n j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \overline{x}^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial \overline{x}^{a_n}}V^j \\
&= T_{i_1\cdots i_n j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \overline{x}^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial \overline{x}^{a_n}}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b}\overline{V}^b
\end{aligned}$$

$\overline{V}^b$ は任意なので

$$\overline{T}_{a_1\cdots a_n b} = T_{i_1\cdots i_n j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \overline{x}^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial \overline{x}^{a_n}}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b}$$

よって、$T_{i_1\cdots i_n j}$ はテンソルの変換則に従っているので、$S_{a_1 a_2\cdots a_n}$ がテンソルなら $T_{a_1\cdots a_n b}$ はテンソルです。

- **添え字の上げ下げ**

テンソル T^{jk} に 2 階の共変テンソル g_{ik} を作用させて

$$T^j_{\ i} = g_{ik}T^{jk}$$

のように 2 階の混合テンソルにすることができます。また

$$g_{ab}g_{ik}T^{ak} = T_{bi}$$

のように反変を共変に変える作業も行えます。この 2 階の共変テンソル g_{ik} は基本テンソル (fundamental tensor) と呼ばれ、テンソルの計算では多用されるものです。添え字を下げるものが出てきましたが、逆に添え字を上げるものは g^{ik} になり、g_{ik} の逆行列にあたります。これを使えば

$$g^{ab}g^{ik}T_{ak} = T^{bi}$$

のように共変を反変に変えられます。添え字の上げ下げで注意することは

$$T^j_i = g_{ik}T^{jk}\ ,\ T^j_i = g_{ik}T^{kj}$$

といったものは一般的には等しくなりません (例えば、T^{kj} の添え字 k, j の入れ替えに対して符号が変わるものとか)。なので、表記としては

$$T^j_{\ i} = g_{ik}T^{jk}\ ,\ T_i^{\ j} = g_{ik}T^{kj}$$

このように添え字の位置をずらして書きます。$T^{jk} = T^{kj}$ であればこんなことは気にしないでも大丈夫です。

ここで基本テンソルと言っているものは計量テンソル (計量空間の計量テンソル) のことです。なので、基本テンソルは一般相対性理論では対応する 4 次元空間の計量テンソルとなります。

- **計量テンソル**

リーマン空間における計量テンソルは線素を作る時に

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

として定義されます。特に D 次元ミンコフスキー空間では

$$g_{00}=+1\ ,\ g_{11}=-1\ ,\ g_{22}=-1\ ,\ g_{33}=-1\ ,\ \cdots g_{D-1D-1}=-1$$

となっています (もしくは $g_{00}=-1,g_{11}=+1,\cdots$)。上付きと下付きの計量テンソルは逆行列の関係なので

$$g_{ij}g^{ik}=\delta^i_j$$

$i=j$ ならトレースとなって空間の次元の数と一致します。例えば 4 次元なら

$$g_{ij}g^{ij}=4$$

となり、次元と一致します。

一般相対性理論の計算では計量の行列式 $g=\det g_{ij}$ がわりと頻繁に出てきます (g_{ij} の行列式であることに注意)。なので、行列式 g の微分を求めておきます。g^{ik} と g_{ik} は逆行列の関係 ($g^{ik}g_{ik}=\delta^i_i$) で、逆行列は余因子 Δ^{ik} を使うことで

$$g^{ik}=\frac{\Delta^{ik}}{g}$$

で求められます (数学の「行列」参照)。Δ^{ik} は g_{ik} の余因子です。余因子を使って行列式を表すと

$$g=\sum_i g_{ik}\Delta^{ik}$$

と書けることから

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}=\Delta^{ik}\ ,\ \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}=g^{ik}$$

となります。なので、行列式の計量の変化に対する変化量 dg は

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}$$

となります。

この場合、$g_{ik}dg^{ik}=g^{ik}dg_{ik}$ ではないことに気をつけてください。このことは、$g^{ik}g_{ik}=\delta^i_i$ を使うと分かります。定数なので微分すれば 0 になることから

$$d(g^{ik}g_{ik})=g_{ik}dg^{ik}+g^{ik}dg_{ik}=0$$

つまり

$$g_{ik}dg^{ik} = -g^{ik}dg_{ik}$$

のように添え字の上付き下付きを変えると符号が反転します。これを使えば

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g^{ik}} = -g_{ik}$$

となっていることも分かります。同様に、$g_{ik}g^{kj} = \delta^\nu_\mu$ から

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}g^{kj} + g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^l} = 0$$

というのも出てきます。

通常、計量テンソルの行列式は $g = \det g_{ij}$ のように下付きに対して定義され、g^{ij} に対する行列式は

$$\begin{aligned}
g_{ik}g^{kj} &= \delta^j_i \\
\det(g_{ik}g^{kj}) &= \det\delta^j_i \\
\det(g_{ik})\det(g^{kj}) &= 1 \\
g\det(g^{kj}) &= 1
\end{aligned}$$

より、$\det g^{kj} = g^{-1}$ となります。

- **テンソル密度**

テンソル密度 $t^{ij\cdots}_{ab\cdots}$ は

$$\bar{t}^{ij\cdots}_{mn\cdots} = \Big(\frac{\partial(x^1, x^2, \cdots)}{\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots)}\Big)^W \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^a}\frac{\overline{x}^j}{\partial x^b}\cdots\frac{\partial x^c}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^d}{\partial\overline{x}^n}\cdots t^{ab\cdots}_{cd\cdots}$$

このような変換に従うものです。$|\partial(x^1, x^2, \cdots)/\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots)|$ はヤコビアンで

$$\Big|\frac{\partial(x^1, x^2, \cdots)}{\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots)}\Big| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial\overline{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial\overline{x}^2} & \cdots \\ \frac{\partial x^2}{\partial\overline{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial\overline{x}^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$|\ |$ は行列式です。0 階のテンソル密度をスカラー密度、1 階のテンソル密度をベクトル密度と言います。例えば、計量の行列式 $\det g_{ij} = |g_{ij}| = g$ は

$$\overline{g}=|\overline{g}_{ij}|=|g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial\overline{x}^j}|=|g_{ab}||\frac{\partial x^a}{\partial\overline{x}^i}||\frac{\partial x^b}{\partial\overline{x}^j}|=g|\frac{\partial x^a}{\partial\overline{x}^i}|^2$$

と書けるので $W=2$ でのスカラー密度です。

ヤコビアンが計量の行列式 g になっているなら

$$(-\overline{g})^{-W/2}\overline{t}^{ij}_{mn}=(-g)^{-W/2}\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^a}\frac{\overline{x}^j}{\partial x^b}\cdots\frac{\partial x^c}{\partial\overline{x}^m}\frac{\partial x^d}{\partial\overline{x}^n}\cdots t^{ab\cdots}_{cd\cdots}$$

ここで $W=1$ のとき、$t^{ab\cdots}_{cd\cdots}$ が

$$t^{ab\cdots}_{cd\cdots}=\sqrt{-g}T^{ab\cdots}_{cd\cdots}$$

このようになっていれば、$T^{ab\cdots}_{cd\cdots}$ はテンソルの変換則に従うので、$T^{ab\cdots}_{cd\cdots}$ はテンソルです。大抵の場合で、テンソル密度といったときはこの形を指します。なぜなら、$\sqrt{-g}$ は不変な体積要素を作る時に出てくるからです (「共変微分」参照)。$\sqrt{-g}A$ ならスカラー密度、$\sqrt{-g}A^i$ ならベクトル密度です。

- クロネッカーデルタ

クロネッカーデルタの基本的な形は

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

トレースは

$$\sum_{i=1}^{D}\delta^i_i=D$$

クロネッカーデルタはさらに拡張することができて

$$\delta^{ab}_{ij}=(\delta^a_i\delta^b_j-\delta^b_i\delta^a_j)=\begin{vmatrix}\delta^a_i & \delta^b_i\\ \delta^a_j & \delta^b_j\end{vmatrix}$$

$|\ |$ は行列式です。同じようにして添え字の数を増やしていけます。例えば、6 個なら

$$\delta^{abc}_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta^a_i & \delta^b_i & \delta^c_i\\ \delta^a_j & \delta^b_j & \delta^c_j\\ \delta^a_k & \delta^b_k & \delta^c_k\end{vmatrix}$$

となります。また、この構造から分かるように

$$\delta^{ab}_{ij} = \begin{cases} +1 & a \neq b\ ,\ a = i\ ,\ b = j \\ -1 & a \neq b\ ,\ b = i\ ,\ a = j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\delta^{abc}_{ijk} = \begin{cases} +1 & a \neq b \neq c\ ,\ i,j,k \text{ を固定して } a,b,c \text{ が偶置換} \\ -1 & a \neq b \neq c\ ,\ i,j,k \text{ を固定して } a,b,c \text{ が奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

添え字の数が増えても同じようになります。

- レヴィ・チビタテンソル

　レヴィ・チビタ記号はいろいろなところに出てくる反対称な記号で、4 次元において

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1 & \text{ijkl が偶置換} \\ -1 & \text{ijkl が奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

反対称な記号なので添え字の文字が同じだと 0 になります (例えば、$\epsilon_{1123} = \epsilon_{1223} = 0$ とか)。

　ここで、4 次元空間における 4 つのベクトル $\xi^i_{(1)}, \xi^j_{(2)}, \xi^k_{(3)}, \xi^l_{(4)}$ を用意します (括弧つきの添え字がベクトルの区別をしています)。これによって

$$D = \epsilon_{ijkl}\xi^i_{(1)}\xi^j_{(2)}\xi^k_{(3)}\xi^l_{(4)}$$

というのを考えます (i, j, k, l は $1 \sim 4$)。これは $\xi^i_{(a)}$ の行列式に対応します。D の変換はベクトルの変換

$$\overline{\xi}^i_{(a)} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l}\xi^l_{(a)}$$

によるので

$$\overline{D} = \frac{\partial(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots)}{\partial(x^1, x^2, \cdots)}D$$

となっています。これとテンソル密度の式を比べると、D^{-1} はスカラー密度になっていることが分かります。よって、D^{-1} がスカラー密度なので $\sqrt{-g}$ で割ればスカラーになることから、$\sqrt{-g}D$ はスカラーです。つまり、両辺に $\sqrt{-g}$ をかけた

$$\sqrt{-g}D = \sqrt{-g}\epsilon_{ijkl}\xi^i_{(1)}\xi^j_{(2)}, \xi^k_{(3)}\xi^l_{(4)}$$

これの左辺はスカラーであるために、$\sqrt{-g}\epsilon_{ijkl}$ はテンソルになっていなければいけません。そのため $\sqrt{-g}\epsilon_{ijkl}$ をレヴィ・チビタテンソルと呼びます。また、$\sqrt{-g}$ がついているので、すぐに ϵ_{ijkl} はテンソル密度になっていることも分かり、レヴィ・チビタテンソル密度と呼んだりします (共変での)。式の形から分かるように、

$W=+1$ となっています。この話によって、± 1 の値を持つのはレヴィ・チビタテンソル密度になっています。添え字が上付きの場合も同じように作ることができて、その場合ヤコビアンが逆になるだけなので、すぐに

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{ijkl}$$

が反変でのレヴィ・チビタテンソルであることが分かります ($W=-1$)。

レヴィ・チビタテンソルはテンソルなので添え字の上げ下げが (レヴィ・チビタテンソルを e^{abcd}, e_{abcd} と書きます)

$$e_{ijkl}=g_{ia}g_{jb}g_{kc}g_{ld}e^{abcd}$$

$$e^{ijkl}=g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}e_{abcd}$$

と素直に行うことができます。この式から、共変でのレヴィ・チビタテンソル密度の値がどうなっているのか分かります。反変でのレヴィ・チビタ密度 ϵ_{abcd} が $a,b,c,d=1,2,3,4$ の並びに対して偶置換なら $+1$、奇置換なら -1 と定義し、$i,j,k,l=1,2,3,4$ としたときに

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{ijkl} &= g^{ia}g^{jb}g^{kc}g^{ld}\sqrt{-g}\epsilon_{abcd}\\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{1234} &= g^{1a}g^{2b}g^{3c}g^{4d}\sqrt{-g}\epsilon_{abcd}\end{aligned}$$

$g^{1a}g^{2b}g^{3c}g^{4d}\epsilon_{abcd}$ は g^{ij} の行列式なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{1234} &= \frac{1}{g}\sqrt{-g}\\ \epsilon^{1234} &= -1\end{aligned}$$

この結果から、$\epsilon_{1234}=+1$ に対して $\epsilon^{1234}=-1$ と分かり、他の場合も同様なので、符合が反転します。反変と共変のレヴィ・チビタテンソル密度の符号の定義は本によって違う場合があるので注意してください。さらに、ただの反対称な記号の意味で使っていることが多く、そのときは上付き、下付きで同じものです (計量で添え字の上げ下げを行ったものではない)。