エントロピーの性質

エントロピーの性質を羅列しています。
log は $\log_2$ としています。

- $0 \le H(X) \le \log n$.
- $H_b(X) = (\log_b a) H_a(X)$.
- $H(X,Y) \ge 0$.
- $H(X,Y) = H(Y,X)$.
- $H(X|Y) \ne H(Y|X)$.
- $H(X,Y) = H(X|Y) - H(X) = H(Y|X) - H(Y)$.
- $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$.
- X, Y において $y = g(x_i)$ となっているとき、$H(g(X)) \le H(X)$。
- $H(Y|X) \le H(Y)$, $H(X|Y) \le H(X)$.
- $H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$.
- $H(X) < H(Y)$ なら $0 \le I(X;Y) \le H(X)$、$H(Y) < H(X)$ なら $0 \le I(X;Y) \le H(Y)$。
- $H(X) < H(Y)$ なら $H(Y) \le H(X,Y)$、$H(Y) < H(X)$ なら $H(X) \le H(X,Y)$。
- $D(P||Q) \ge 0$.
- $H(X,Y,Z) = H(X,Y|Z) + H(Z) = H(Y|X,Z) + H(X,Z)$.
- $H(X,Y|Z) = H(Y|X,Z) + H(X|Z)$.
- $H(X,Y,Z) = H(Z|X,Y) + H(Y|X) + H(X)$.
- $H(X,Y|Z) \le H(X|Z) + H(Y|Z)$.
- $H(X|Y,Z) \le H(X|Z)$
- X, Y, Z がマルコフ連鎖なら、$I(X;Y) \ge I(X;Z)$, $H(X|Y) \le H(X|Z)$ (データ処理不等式)。
- ファノの不等式
- $H(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} H(X_i | X_{i-1}, \ldots, X_1)$.
- $H(X_1, X_2, \ldots, X_N) \le H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_N)$.
- $H(Y|X_1, X_2, \ldots, X_{N+1}) \le H(Y|X_1, X_2, \ldots, X_N)$

エントロピー $H(X)$、結合エントロピー $H(X,Y)$、条件付きエントロピー $H(Y|X)$、相対エントロピー $D(P||Q)$、相互情報量 $I(X;Y)$ は

$$H(X) = -\sum_i P(x_i) \log P(x_i)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(x_i, y_j)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(y_j|x_i)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = \sum_{i,j} P(x_i, y_i) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)}$$

$$D(P||Q) = -\sum_i P(x_i) \log \frac{Q(x_i)}{P(x_i)}$$

事象 X, Y での結果を x_i, y_j とし、$P(x_i)$ は x_i が起きる確率、$P(x_i, y_j)$ は x_i, y_j が起きる結合確率、$P(y_j|x_i)$ は与えられた x_i に対して y_j が起きる条件付き確率です。相対エントロピーでの Q は P ではない任意の確率を与える関数としています。和の範囲は事象 X, Y に含まれる結果の個数に対して行いますが、範囲は書かないと混乱しそうな場合を除いては省略して書いていきます。

「エントロピー」で求めている性質を並べておきます。エントロピーは

$$0 \leq H(X) \leq \log n$$

$$H_b(X) = (\log_b a) H_a(X)$$

H_a は対数の底が a でのエントロピー、n は X の結果の数、エントロピーが最大になるのは x_i の全ての確率が等しいときです。結合エントロピーは定義から

$$H(X,Y) \geq 0$$

$$H(X,Y) = H(Y,X)$$

条件付きエントロピーは

$$H(Y|x_i) = -\sum_j P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i)$$

$$H(Y|X) = \sum_i P(x_i) H(Y|x_i) = -\sum_{i,j} P(y_j|x_i) P(x_i) \log P(y_j|x_i) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(y_j|x_i)$$

X, Y を入れ替えたときは

$$H(X|Y) = \sum_j P(y_j) H(X|y_j) = -\sum_{i,j} P(x_i|y_j) P(y_j) \log P(x_i|y_j) \neq H(Y|X)$$

また、条件付き確率 $P(x_i|x_i) = 1$ から $H(X|X) = 0$ です。

$H(X,Y)$ を条件付き確率を使った形に書き換えてみると

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(x_i,y_j) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(y_j|x_i)P(x_i) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(y_j|x_i) - \sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(x_i) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(y_j|x_i) - \sum_{i} P(x_i)\log P(x_i) \\
&= H(Y|X) + H(X) \qquad \text{(1a)}
\end{aligned}
$$

$H(X|Y)$ を同じように変形すれば

$$
\begin{aligned}
H(X|Y) &= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(x_i|y_j) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log \frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)} \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(x_i,y_j) + \sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(y_j) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i,y_j)\log P(x_i,y_j) + \sum_{j} P(y_j)\log P(y_j) \\
&= H(X,Y) - H(Y) \qquad \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

(1a),(1b) から

$$
H(X,Y) = H(X|Y) - H(X) = H(Y|X) - H(Y) \qquad (2)
$$

これは結合エントロピーの連鎖律と呼ばれます。これらは後でよく使うので覚えておくと便利です。

相互情報量は定義から $I(X;Y) = I(Y;X)$ です。(1a),(1b) を使えば

$$
I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)
$$

$I(X;X)$ では $H(X|X) = 0$ から $I(X;X) = H(X)$ です。

エントロピーの不等式を求めます。凸関数とイェンセンの不等式が出てきますが、導出は「イェンセンの不等式」を見てください。

- X,Y において $y = g(x_i)$ となっているとき、$H(g(X)) \leq H(X)$。

  X,Y の結果 x_i, y が関数 g によって $y = g(x_i)$ となっているとします。エントロピーの変数としては $Y = g(X)$ と書くことにして

$$
H(X, g(X)) = H(g(X)|X) + H(X)
$$

条件として x_i が与えられたとき、Y は $y = g(x_i)$ に決まるので第 1 項は 0 です。

$$H(X, g(X)) = H(X|g(X)) + H(g(X)) \tag{3}$$

第 1 項では $y = g(x_i)$ となる x_i が 1 つに決まるとはしていないので、このときは 0 にならないです。条件付きエントロピーは 0 以上なので

$$H(X, g(X)) \geq H(g(X))$$

よって

$$H(g(X)) \leq H(X)$$

等号になるのは $y = g(x_i)$ が 1 つに決まるときです ((3) の第 1 項が消えるとき)。

- $H(Y|X) \leq H(Y)$, $H(X|Y) \leq H(X)$.
  自然対数の関係

$$\ln x \leq x - 1$$

において、x を

$$\frac{q_{ij}}{p_{ij}} \qquad (\sum_{i,j} q_{ij} = 1\ ,\ \sum_{i,j} p_{ij} = 1)$$

とすれば

$$p_{ij} \ln \frac{q_{ij}}{p_{ij}} \leq q_{ij} - p_{ij}$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} \ln \frac{q_{ij}}{p_{ij}} \leq \sum_{i,j} q_{ij} - \sum_{i,j} p_{ij} = 0$$

底の変換をすれば

$$\sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{q_{ij}}{p_{ij}} \leq 0 \tag{4a}$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{1}{p_{ij}} \leq \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{1}{q_{ij}} \tag{4b}$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) - H(Y) &= -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(y_j|x_i) + \sum_j P(y_j) \log P(y_j) \\
&= -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(x_i, y_j) + \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(x_i) + \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log P(y_j) \\
&= \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i)P(y_j)}{P(x_i, y_j)} \quad (\sum_{i,j} P(x_i)P(y_j) = \sum_i P(x_i) \sum_j P(y_j) = 1) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

なので

$$
H(Y|X) \leq H(Y) \tag{5a}
$$

X, Y を入れ替えても同様に

$$
H(X|Y) \leq H(X) \tag{5b}
$$

となります。

もしくは、凸関数 f によるイェンセンの不等式

$$
\sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i) f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \quad (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1)
$$

を使うなら、$-\log x$ が凸関数なので ($H(Y|X)$ での $P(y_j|x_i) = 0$ の項は $x \to 0$ で $x \log x = 0$ から無視)

$$
\begin{aligned}
-H(Y|X) &= \sum_j P(y_j) \sum_i P(x_i|y_j) \log P(y_j|x_i) \quad (P(x_i, y_j) = P(x_i|y_j)P(y_j)) \\
&= -\sum_j P(y_j) \sum_i P(x_i|y_j) \log \frac{1}{P(y_j|x_i)} \\
&\geq -\sum_j P(y_j) \log \sum_i \frac{P(x_i|y_j)}{P(y_j|x_i)} \\
&= -\sum_j P(y_j) \log \sum_i \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} \frac{P(x_i)}{P(x_i, y_j)} \\
&= -\sum_j P(y_j) \log \sum_i \frac{P(x_i)}{P(y_j)} \\
&= -\sum_j P(y_j) \log \frac{1}{P(y_j)} \\
&= -H(Y)
\end{aligned}
$$

- $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$.
  結合エントロピーの連鎖律 (2) と (5a) から

$$H(X,Y) = H(Y|X) + H(X) \leq H(X) + H(Y) \tag{6}$$

また、$H(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ の場合を最後に求めています。

- $H(X) < H(Y)$ なら $0 \leq I(X;Y) \leq H(X)$、$H(Y) < H(X)$ なら $0 \leq I(X;Y) \leq H(Y)$。
  相互情報量の定義に (5b) を入れれば

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0$$

条件付き確率は 0 以上なので

$$0 \leq I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \leq H(X)$$
$$0 \leq I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \leq H(Y)$$

$I(X;Y)$ は $H(X), H(Y)$ のどちらよりも小さくなっているので

$$\begin{aligned} &0 \leq I(X;Y) \leq H(X) \quad (H(X) < H(Y)) \\ &0 \leq I(X;Y) \leq H(Y) \quad (H(Y) < H(X)) \end{aligned} \tag{7}$$

- $H(X) < H(Y)$ なら $H(Y) \leq H(X,Y)$、$H(Y) < H(X)$ なら $H(X) \leq H(X,Y)$。
  (7 は

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X,Y) + H(Y) \leq H(X) \quad (H(X) < H(Y))$$
$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X,Y) + H(Y) \leq H(Y) \quad (H(Y) < H(X))$$

なので

$$H(Y) \leq H(X,Y) \quad (H(X) < H(Y))$$
$$H(X) \leq H(X,Y) \quad (H(Y) < H(X))$$

- $D(P||Q) \geq 0$.
  相対エントロピーにイェンセンの不等式を使えば

$$D(P||Q) = -\sum_i P(x_i) \log \frac{Q(x_i)}{P(x_i)} \geq -\log[\sum_i P(x_i) \frac{Q(x_i)}{P(x_i)}] = -\log[\sum_i Q(x_i)] = -\log 1 = 0$$

もしくは、対数の関係

$$\sum_i p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leq 0 \quad (\sum_i p_i = 1\ ,\ \sum_i q_i = 1)$$

からも分かります。

事象が X, Y の 2 個だけで見てきましたが、3 個にします。3 個のときでのエントロピー、結合エントロピー、条件付きエントロピー、相互情報量は

$$\begin{aligned}
&H(X,Y,Z) = -\sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log p(x_i, y_j, z_k) \\
&H(X,Y|Z) = -\sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log p(x_i, y_j|z_k) \\
&H(Z|X,Y) = -\sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \log p(z_k|x_i, y_j) \\
&I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y,Z) \\
&I(X,Y;Z) = H(X,Y) - H(X,Y|Z)
\end{aligned}$$

と定義します。条件付き確率 $P(x_i, y_j|z_k)$ は与えられた z_k に対して x_i, y_j が起きる確率、$P(z_k|x_i, y_j)$ は与えられた x_i, y_j に対して z_k が起きる確率です。条件付き確率では変数が増えても

$$\sum_{i,j} P(x_i, y_j|z_k) = 1\ ,\ \sum_i P(x_i|y_j, z_k) = 1$$

結合確率に対しては

$$P(x_i, y_j) = \sum_k P(x_i, y_j, z_k)\ ,\ P(x_i) = \sum_{j,k} P(x_i, y_j, z_k)$$

$P(x_i, y_j) = P(x_i|y_j)P(y_j)$ を 3 個の場合にすると

$$\begin{aligned}
&P(x_i, y_j, z_k) = P(x_i, y_j|z_k)P(z_k) \\
&P(x_i, y_j, z_k) = P(x_i|y_j, z_k)P(y_j, z_k) = P(x_i|y_j, z_k)P(y_j|z_k)P(z_k)
\end{aligned}$$

2 番目は結合確率を条件付き確率で分解していく連鎖律となっています。

- $H(X,Y,Z) = H(X,Y|Z) + H(Z) = H(Y|X,Z) + H(X,Z)$
  条件付きエントロピーを変形すると

$$\begin{aligned} H(X,Y|Z) &= -\sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log p(x_i,y_j|z_k) \\ &= -\sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log \frac{p(x_i,y_j,z_k)}{p(z_k)} \\ &= H(X,Y,Z) + \sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log p(z_k) \\ &= H(X,Y,Z) + \sum_{k} p(z_k)\log p(z_k) \\ &= H(X,Y,Z) - H(Z) \end{aligned} \tag{8}$$

同じように

$$\begin{aligned} H(Y|X,Z) &= -\sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log p(y_j|x_i,z_k) \\ &= -\sum_{i,j,k} p(x_i,y_j,z_k)\log \frac{p(x_i,y_j,z_k)}{p(x_i,z_k)} \\ &= H(X,Y,Z) + \sum_{i,j,k} p(x_i,z_k)\log p(x_i,z_k) \\ &= H(X,Y,Z) - H(X,Z) \end{aligned} \tag{9}$$

- $H(X,Y|Z) = H(Y|X,Z) + H(X|Z)$.
  (8),(9) を合わせて (1b) を使えば

$$H(X,Y|Z) = H(Y|X,Z) + H(X,Z) - H(Z) = H(Y|X,Z) + H(X|Z) \tag{10}$$

  これは条件付きエントロピーの連鎖律です。

- $H(X,Y,Z) = H(Z|X,Y) + H(Y|X) + H(X)$.
  (8) で X,Y,Z の並びを $H(Y,Z|X)$ にしても他は変わらないので

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y,Z|X)$$

  (10) でも文字を入れ替えれば

$$H(Y,Z|X) = H(Z|X,Y) + H(Y|X) \tag{11}$$

  これらから

$$H(X,Y,Z) = H(Z|X,Y) + H(Y|X) + H(X) \tag{12}$$

となり、3 個の変数でのエントロピーの連鎖律になります。N 個の場合は表記がゴチャゴチャするので、最後に求めています。

- $H(X,Y|Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z)$.
  相対エントロピーを 2 変数に拡張して

$$D^{(2)}(P||Q) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(x_i, y_j)}{P(x_i, y_j)}$$

変形すると

$$\begin{aligned} D^{(2)}(P||Q) =& -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(y_j|x_i)Q(x_i)}{P(y_j,|x_i)P(x_i)} \\ =& -\sum_{i} P(x_i) \log \frac{Q(x_i)}{P(x_i)} - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)} \\ =& D(P||Q) - \sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)} \end{aligned}$$

第 2 項を

$$\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)} = \sum_{i,j} P(x_i)P(y_j|x_i) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)} = \sum_{i} P(x_i) \sum_{j} P(y_j|x_i) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)}$$

と変形させると、相対エントロピーにおける確率 P, Q を与えられた x に対する条件付き確率 P_x, Q_x に置き換えた

$$D(P_{Y|x}||Q_{Y|x}) = -\sum_{j} P_x(y_j) \log \frac{Q_x(y_j)}{P_x(y_j)} = -\sum_{j} P(y_j|x) \log \frac{Q(y_j|x)}{P(y_j|x)} \geq 0$$

に対応しています。条件付き確率 P_x, Q_x としただけなので、0 以上のままです。これから

$$D(P_{Y|X}||Q_{Y|X}) = \sum_{i} P(x_i) D(P_{Y|x_i}||Q_{Y|x_i}) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log \frac{Q(y_j|x_i)}{P(y_j,|x_i)} \geq 0$$

とすれば

$$D^{(2)}(P||Q) = D(P||Q) + D(P_{Y|X}||Q_{Y|X}) \geq 0$$

さらに、$D(P_{Y|x}||Q_{Y|x})$ での変数を増やして

$$D^{(2)}(P_{Y|z}||Q_{Y|z}) = -\sum_{i,j} P_z(x_i, y_j) \log \frac{Q_z(x_i, y_j)}{P_z(x_i, y_j)} = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j|z) \log \frac{Q(x_i, y_j|z)}{P(x_i, y_j|z)} \geq 0$$

これも $D^{(2)}(P||Q)$ での確率を条件付き確率 P_z, Q_z に置き換えただけなので、0 以上です。これの $P(z_k)$ による平均を取って

$$
\begin{aligned}
D^{(2)}(P_{XY|Z}||Q_{XY|Z}) = & \sum_k P(z_k) D^{(2)}(P_{XY|z_k}||Q_{XY|z_k}) \\
= & -\sum_k P(z_k) \sum_{i,j} P(x_i, y_j|z_k) \log \frac{Q(x_i, y_j|z_k)}{P(x_i, y_j|z_k)} \\
= & -\sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log \frac{Q(x_i, y_j|z_k)}{P(x_i, y_j|z_k)} \\
\geq & \ 0
\end{aligned}
$$

ここで任意の確率 Q が

$$
Q(x_i, y_j|z_k) = P(x_i|z_k)P(y_j|z_k)
$$

となっているとすると

$$
\begin{aligned}
0 \leq & -\sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log \frac{P(x_i|z_k)P(y_j|z_k)}{P(x_i, y_j|z_k)} \\
= & -\sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log P(x_i|z_k) - \sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log P(y_j|z_k) + \sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log P(x_i, y_j|z_k) \\
= & -\sum_{i,k} P(x_i, z_k) \log P(x_i|z_k) - \sum_{j,k} P(y_j, z_k) \log P(y_j|z_k) + \sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log P(x_i, y_j|z_k) \\
= & H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

よって

$$
H(X, Y|Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z) \qquad (14)
$$

と求まります。
また、(13) は

$$
\begin{aligned}
I(X; Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z) = & H(Y|Z) - H(Y|X, Z) \\
= & -\sum_{i,j,k} P(x_i, y_j, z_k) \log \frac{P(x_i|z_k)P(y_j|z_k)}{P(x_i, y_j|z_k)}
\end{aligned}
$$

と定義され、条件付き相互情報量 (conditional mutual information) と呼ばれます。

- $H(X|Y, Z) \leq H(X|Z)$
  (11) の文字の並びを (14) に合わせれば

$$
H(X, Y|Z) = H(Y|X, Z) + H(X|Z)
$$

なので

$$H(Y|X,Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X|Z) = H(Y|Z) \tag{15}$$

となります。

マルコフ連鎖 (Markov chain) の場合も少し見ておきます。事象 X, Y, Z があり、それぞれの結果 x, y, z による結合確率が

$$P(x,y,z) = P(z|y)P(y|x)P(x)$$

と書けるとき、X, Y, Z はマルコフ連鎖であると言われます。X の影響は Y のみ、Y の影響は Z のみに与えるという条件がある場合です。このため、与えられた x, y に対する z の条件付き確率は

$$P(z|x,y) = P(z|y)$$

となります。

X, Y, Z がマルコフ連鎖と言っているときは $X \to Y \to Z$ の順に影響を与えているとします。

- X, Y, Z がマルコフ連鎖なら、$I(X;Y) \geq I(X;Z)$, $H(X|Y) \leq H(X|Z)$。
  3 個の変数による相互情報量は

$$I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y,Z)$$

これを

$$I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y) + H(X|Y) - H(X|Y,Z)$$

としたとき、マルコフ連鎖であるなら、Z は X に影響しないので第 4 項は $H(X|Y)$ と同じです。なので

$$I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y) = I(X;Y)$$

一方で、条件付き相互情報量は

$$\begin{aligned} I(X;Y,Z) &= H(X) - H(X|Y,Z) \\ &= H(X) - H(X|Z) + H(X|Z) - H(X|Y,Z) \\ &= I(X;Z) + H(X|Z) - H(X|Y,Z) \end{aligned}$$

と書けるので、(15) から

$$I(X;Y) = I(X;Z) + H(X|Z) - H(X|Y,Z) \geq I(X;Z)$$

これをデータ処理不等式 (data-processing inequality) と言います。
条件付きエントロピーに置き換えると

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &\geq I(X;Z) \\
H(X) - H(X|Y) &\geq H(X) - H(X|Z) \\
H(X|Y) &\leq H(X|Z)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

- ファノの不等式

$X, Y, \hat{X}$ をマルコフ連鎖とします。$\hat{X}$ で起きる結果は関数 g によって Y の結果から $g(y)$ として与えられるとします。このとき、$\hat{X}$ の結果と X の結果が同じにならない確率 P_{err} の不等式を求めます。結果が同じになるときは $\hat{X} = X$、ならないときは $\hat{X} \neq X$ と書いていきます。

$\hat{X} = X$ のとき e_1、$\hat{X} \neq X$ のとき e_2 となる事象 E を作ります。e_1, e_2 のどちらが起きるかは $X, \hat{X}$ から与えられるので、E は $X, \hat{X}$ に依存しています。

このようなことを考える理由を簡単に言っておきます。送信側から文字 (X) を送るとき、途中で文字が変化する可能性があるとします。そうすると、受信側で受け取った文字 (Y) はもとの文字とは異なっている可能性があるので、もとの文字に戻せ方法 $(g(Y))$ が必要になり、その方法でもとの文字に戻せない確率が P_{err} です。このため、戻せない確率の不等式が重要になります。

条件付きエントロピーを $H(X, E|\hat{X})$ と作ると、(11) から

$$
H(X, E|\hat{X}) = H(X|\hat{X}) + H(E|X, \hat{X})
$$

$X, \hat{X}$ が条件として与えられるとそれに対応して E は e_1 か e_2 のどちらかに決まるので、第 2 項は 0 です (確定しているから)。X, E の入れ替えた式では

$$
H(X, E|\hat{X}) = H(E|\hat{X}) + H(X|E, \hat{X}) \leq H(E) + H(X|E, \hat{X})
$$

(5a) を使っています。合わせれば

$$
H(X|\hat{X}) \leq H(E) + H(X|\hat{X}, E) \tag{17}
$$

第 2 項は

$$
H(X|\hat{X}, E) = \sum_j \sum_{i=1}^{2} P(\hat{x}_j, e_i) H(X|\hat{x}_j, e_i) = \sum_j P(\hat{x}_j, e_1) H(X|\hat{x}_j, e_1) + \sum_j P(\hat{x}_j, e_2) H(X|\hat{x}_j, e_2)
$$

e_1 のときは $\hat{X} = X$ ($\hat{X}$ の結果 $g(y)$ と X の結果 x が同じ) なので、第 1 項は 0 となり

$$
H(X|\hat{X}, E) = \sum_j P(\hat{x}_j, e_2) H(X|\hat{x}_j, e_2)
$$

e_2 はエントロピーに対する固定された条件になっているだけなので、エントロピーの関係

$$H(X|Y) = \sum_j P(y_j)H(X|y_j) \le H(X) \le \log|X|$$

から

$$\sum_j P(\hat{x}_j, e_2)H(X|\hat{x}_j, e_2) \le \log|X|\sum_j P(\hat{x}_j, e_2)$$

$\hat{x}_j \neq x$ の確率を足せば、$\hat{X} = X$ とならない全体の確率 P_{err} になることから

$$H(X|E, \hat{X}) \le P_{err}\log|X| \tag{18}$$

これを (17) に入れて

$$H(X|\hat{X}) \le H(E) + P_{err}\log|X|$$

今はマルコフ連鎖としているので、データ処理不等式

$$H(X|Y) \le H(X|\hat{X})$$

から

$$H(X|Y) \le H(X|\hat{X}) \le H(E) + P_{err}\log|X|$$

これをファノ (Fano) の不等式と言います。$H(E)$ での確率は $P(e_1) = 1 - P_{err}$ と $P(e_2) = P_{err}$ です。

$g(Y)$ は X のどれかの結果を与えるとし、X に $g(y_i) = x_i$ となる x_i が存在するとしてみます。そうすると

$$\begin{aligned} H(X|e_2, \hat{X}) &= \sum_j P(g(y_j))H(X|g(y_j), e_2) \\ &= P(g(y_1))H(X|g(y_1), e_2) + P(g(y_2))H(X|g(y_2), e_2) + \cdots \end{aligned}$$

と書いたとき、各項において $g(y_i) = x_i$ となる x_i が X に 1 個いますが、e_2 はそうなる場合を除外するという条件です。なので、各項における X では $g(y_i) = x_i$ となる x_i が除外された $|X| - 1$ 個の結果を含んでいます。このため、(18) は

$$H(X|E, \hat{X}) \le P_{err}\log[|X| - 1]$$

となり、ファノの不等式は

$$H(X|Y) \le H(E) + P_{err}\log[|X| - 1]$$

となります。

また、$H(E)$ での確率は P_{err} と $1-P_{err}$ なので、$H(E)\leq 1$ ($P_{err}=1/2$ のとき最大) となっていることから

$$H(X|Y)\leq 1+P_{err}\log|X|$$

このときは弱いファノの不等式と言われたりします。

最後に変数が N 個の場合に触れておきます。「エントロピー」での表記を使って、例えば事象 X_1,X_2 の結果を $x_i^{(1)},x_j^{(2)}$ とすれば

$$H(X_1,X_2)=-\sum_{i,j}P(x_i^{(1)},x_j^{(2)})\log P(x_i^{(1)},x_j^{(2)})$$

これを省略して

$$H(\boldsymbol{X})=-\sum_{x^{(1)},x^{(2)}}P(x^{(1)},x^{(2)})\log P(x^{(1)},x^{(2)})=-\sum_{\boldsymbol{x}}P(\boldsymbol{x})\log P(\boldsymbol{x})$$

と書くことにします。$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=(x^{(1)},x^{(2)})$ のようになっていて、和での $\boldsymbol{x}$ は $x_i^{(1)},x_j^{(2)}$ での i,j に対して取るという意味です。n 個でも同様にします。条件付きエントロピーでも

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})&=-\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\log P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\\&=-\sum_{i_1,i_2,j_1,j_2}P(x_{i_1}^{(1)},x_{i_2}^{(2)},y_{j_1}^{(1)},y_{j_2}^{(2)})\log P(y_{j_1}^{(1)},y_{j_2}^{(2)}|x_{i_1}^{(1)},x_{i_2}^{(2)})\end{aligned}$$

と表記します。

確率の積は

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})$$

と書けるので、この表記を使うと結合エントロピーと条件付きエントロピーの関係は

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})&=-\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\log P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&=-\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\log P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})\\&=P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\log P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})+P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\log P(\boldsymbol{x})\\&=H(\boldsymbol{X})+H(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

並びを変えても同じなので

$$H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = H(\boldsymbol{X}) + H(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) = H(\boldsymbol{Y}) + H(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$$

となります。

結合エントロピーの連鎖律は (2),(12) から法則性が予想できるように、N 個の変数に対して

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \sum_{i=1}^{N} H(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_1)$$

$i=1$ のときは $H(X_1)$ としています。これを示します。

確率の連鎖律の一般形は

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}) &= P(x^{(N)}|x^{(N-1)}, \ldots, x^{(1)})P(x^{(N-1)}, \ldots, x^{(1)}) \\
&= P(x^{(N)}|x^{(N-1)}, \ldots, x^{(1)})P(x^{(N-1)}|x^{(N-2)}, \ldots, x^{(1)})P(x^{(N-2)}, \ldots, x^{(1)}) \\
&= P(x^{(N)}|x^{(N-1)}, \ldots, x^{(1)})P(x^{(N-1)}|x^{(N-2)}, \ldots, x^{(1)})P(x^{(N-2)}|x^{(N-3)}, \ldots, x^{(1)}) \cdots P(x^{(2)}|x^{(1)})P(x^{(1)}) \\
&= P(x^{(N)}|\boldsymbol{x}_{N-1})P(x^{(N-1)}|\boldsymbol{x}_{N-2})P(x^{(N-2)}|\boldsymbol{x}_{N-3}) \cdots P(x^{(2)}|\boldsymbol{x}_1)P(\boldsymbol{x}_1)
\end{aligned}$$

省略するために

$$\boldsymbol{x}_{N-i} = x^{(N-i)}, \ldots, x^{(1)} \ , \ \boldsymbol{x}_1 = x^{(1)}$$

と書いています。対数を取ると

$$\begin{aligned}
&\log P(\boldsymbol{x}) \\
&\quad = \ \log P(x^{(N)}|\boldsymbol{x}_{N-1}) + \log P(x^{(N-1)}|\boldsymbol{x}_{N-2}) + \cdots + \log P(x^{(2)}|\boldsymbol{x}_1)P(\boldsymbol{x}_1) \\
&\quad = \ \sum_{i=1}^{N} \log P(x^{(i)}|\boldsymbol{x}_{i-1})
\end{aligned}$$

$i=1$ のときは $\log P(x^{(1)}) = \log P(\boldsymbol{x}_1)$ としています。そうすると、結合エントロピーは

$$\begin{aligned}
H(\boldsymbol{X}) &= \ -\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(\boldsymbol{x}) \\
&= \ -\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} \log P(x^{(i)}|\boldsymbol{x}_{i-1})
\end{aligned}$$

和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} \log P(x^{(i)}|\boldsymbol{x}_{i-1}) \\
&\quad = \ \sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(\boldsymbol{x}_1) + \sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(x^{(2)}|\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(x^{(k)}|\boldsymbol{x}_{k-1}) + \cdots
\end{aligned}$$

今の表記では

$$\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) = \sum_{x^{(1)},\dots,x^{(N)}} P(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) = 1$$

のようにしているので、例えば

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(x^{(3)}|\boldsymbol{x}_2) &= \sum_{x^{(1)},\dots,x^{(N)}} P(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) \log P(x^{(3)}|x^{(2)}, x^{(1)}) \\ &= \sum_{x^{(1)},x^{(2)},x^{(2)}} P(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \log P(x^{(3)}|x^{(2)}, x^{(1)})\end{aligned}$$

となります。なので

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(\boldsymbol{x}_1) = \sum_{x^{(1)}} P(x^{(1)}) \log P(x^{(1)}) \\ &\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(x^{(2)}|\boldsymbol{x}_1) = \sum_{x^{(1)},x^{(2)}} P(x^{(1)}, x^{(2)}) \log P(x^{(2)}|x^{(1)}) \\ &\sum_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) \log P(x^{(k)}|\boldsymbol{x}_{k-1}) = \sum_{x^{(1)},\dots,x^{(k)}} P(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) \log P(x^{(k)}|x^{(k-1)}, \dots, x^{(1)})\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{X}) =&\ -\sum_{x^{(1)}} P(x^{(1)}) \log P(x^{(1)}) - \sum_{x^{(1)},x^{(2)}} P(x^{(1)}, x^{(2)}) \log P(x^{(2)}|x^{(1)}) + \cdots \\ &- \sum_{x^{(1)},\dots,x^{(k)}} P(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) \log P(x^{(k)}|x^{(k-1)}, \dots, x^{(1)}) - \cdots \\ =&\ H(X_1) + H(X_2|X_1) + \cdots + H(X_k|X_{k-1}, \dots, X_1) + \cdots \\ =&\ \sum_{i=1}^{N} H(X_i|X_{i-1}, \dots, X_1)\end{aligned}$$

となります。

ついでに N 個での不等式も求めておきます。$H(X) + H(Y)$ は

$$H(X) + H(Y) = -\sum_i P(x_i) \log P(x_i) - \sum_j P(y_j) \log P(y_j) = -\sum_{i,j} P(x_i, y_j) \log[P(x_i)P(y_j)]$$

$p_{ij} = P(x_i, y_j),\ q_{ij} = P(x_i)P(y_j)$ として、対数の関係 (4b) を使えば

$$H(X) + H(Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log q_{ij} \geq -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} = H(X, Y)$$

として、結合エントロピーの不等式が出てきます。そして、(4b) は添え字が増えても同様に成立することから

$$
\begin{aligned}
H(X_1)+&H(X_2)+\cdots+H(X_N)\\
&= -\sum_{x^{(1)}} P(x^{(1)})\log P(x^{(1)}) - \sum_{x^{(2)}} P(x^{(2)})\log P(x^{(2)}) - \cdots - \sum_{x^{(N)}} P(x^{(N)})\log P(x^{(N)})\\
&= -\sum_{\boldsymbol{x}} P(x^{(1)},\ldots,x^{(N)})\log[P(x^{(1)})P(x^{(2)})\cdots P(x^{(N)})]\\
&\geq -\sum_{\boldsymbol{x}} P(x^{(1)},\ldots,x^{(N)})\log P(x^{(1)},\ldots,x^{(N)})\\
&= H(X_1,X_2,\ldots,X_N)
\end{aligned}
$$

と求まります。

また、$H(X|Y,Z)\leq H(X|Z)$ も同様に求められます。これは

$$
\begin{aligned}
H(X|Y,Z)-H(X|Z) &= -\sum_{i,j,k} P(x_i,y_j,z_k)\log P(x_i|y_j,z_k) + \sum_{i,k} P(x_i,z_k)\log P(x_i|z_k)\\
&= -\sum_{i,j,k} P(x_i,y_j,z_k)\log\frac{P(x_i,y_j,z_k)}{P(y_j,z_k)P(x_i|z_k)}
\end{aligned}
$$

分母は

$$
\sum_{i,j,k} P(y_j,z_k)P(x_i|z_k) = \sum_{j,k} P(y_j,z_k)\sum_i P(x_i|z_k) = 1
$$

なので、(4a) から

$$
H(X|Y,Z)-H(X|Z)\leq 0
$$

そして、条件を $N+1$ 個にしても同様にできるので

$$
H(Y|X_1,X_2,\ldots,X_{N+1})\leq H(Y|X_1,X_2,\ldots,X_N)
$$

となります。