複素数

複素数の話の最初によく出てくる、複素共役、絶対値、極形式、ド・モアブルの定理、指数関数、対数関数を扱っています。
最後に求めた関係をまとめています。
x, y, a, b は実数、z, w は複素数としています。

体 (field) の分かりやすい例になるので、2 次元実空間 (2 つの実数による組の集合) から始めます。2 次元実空間 R^2 における点を $z = (x, y)$ とし (x, y は実数)、括弧内の x, y の並びは決まっているとします ($(x, y) \neq (y, x)$)。これの和と積を

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

と定義します。このように定義される (x, y) を複素数 (complex number) と呼びます。複素数全体の集合は C と表記します。このとき

- 単位元
  $(0, 0)$ と $(1, 0)$ は

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)\ ,\ (x, y)(0, 0) = (0, 0)(x, y) = (0, 0)$$

$$(x, y)(1, 0) = (1, 0)(x, y) = (x, y)$$

  $(0, 0)$ は実数の和 $a + 0 = a$ の 0、$(0, 1)$ は実数の積 $a \times 1$ の 1 に対応するので、それぞれ和と積の単位元です。また、$(0, 0)$ は零元です。

- 逆元
  和の逆元は

$$(x + y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

  として、符号を反転したもので与えられ、積の逆元 z^{-1} は、$zz^{-1} = z^{-1}z = (1, 0)$ になればいいので

$$z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$$

  と与えれば

$$zz^{-1} = (x, y)(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}) = (\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2}) = (1, 0)$$

  とできます。

- 交換法則：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$
  z_1, z_2 の和と積は添え字の $1, 2$ に対して対称なので、並びを入れ替えても同じです。

- 結合法則：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
  和は見たままです。積は

$$
\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3) \\
&= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) y_3,\ (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) x_3)
\end{aligned}
$$

  と

$$
\begin{aligned}
z_1 (z_2 z_3) &= (x_1, y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\
&= (x_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2),\ x_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2) + y_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3))
\end{aligned}
$$

  を見比べれば同じなのが分かります。

- 分配法則：$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
  左辺を変形すれば

$$
\begin{aligned}
z_1 (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1 (x_2 + x_3) - y_1 (y_2 + y_3),\ x_1 (y_2 + y_3) + y_1 (x_2 + x_3)) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2 + x_1 x_3 - y_1 y_3,\ x_1 y_2 + y_1 x_2 + x_1 y_3 + y_1 x_3) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3,\ x_1 y_3 + y_1 x_3) \\
&= z_1 z_2 + z_1 z_3
\end{aligned}
$$

このように、2 項演算子として和と積が定義され、それらが交換、結合、分配法則を満たし、和と積の単位元と逆元が与えられてるなら、体 (field) と呼ばれ、今の場合は複素数体と呼ばれます。

2 次元実空間で定義した複素数を 1 次元に対応させます。まず、$(1, 0)$ を実数の 1 に対応させ、実数 x を

$$
(x, 0) = x
$$

と対応させます。そして、$(0, 1)$ の積が

$$
(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)
$$

となっていることから

$$(-1, 0) = -1$$

と対応させて、$i = (0, 1),\ ii = i^2 = -1$ と定義します。これによって

$$(0, y) = (0, 1)(y, 0) = iy$$

と書けるので

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$$

このように、(x, y) と $x + iy$ を対応させることができ、複素数と言ったとき通常は $x + iy$ を指します。これ以降は $x + iy$ を複素数と言っていきます。また、z, w は複素数、x, y, a, b は実数とします。

実数でない複素数 ($z = x+iy$ か $z = iy$) を虚数 (imaginary number)、$z = iy$ のときは純虚数 (purely imaginary)、i を虚数単位 (imaginary unit) と言います。i を虚数と言っている場合もあります。x は実数部分なので実部 (real part)、y は虚部 (imaginary part) と呼ばれます。z の実部、虚部は

$$\mathrm{Re}z = x,\ \mathrm{Im}z = y$$

と表記されます。

(x, y) の演算規則との対応は

- 和、積：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\ ,\ z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- 単位元：$z + 0 = z\ ,\ 1 \times z = z$
- 逆元：$z + (-z) = 0\ ,\ z^{-1} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$
- 交換法則：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1\ ,\ z_1z_2 = z_2z_1$
- 結合法則：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\ ,\ (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
- 分配法則：$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

例えば、積は

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\ \Leftrightarrow\ (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

このように、$i^2 = -1$ が特殊なだけで i は実数と同じ扱いなので、複素数の計算は実数と同じです。z^{-1} は

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

として、実部と虚部に分けられます。i^{-1} は

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=-i\quad (i^{-1}i=ii^{-1}=1\ ,\ -i^2=1)$$

と与えられています。また、i の n 乗は

$$i^2=-1\ ,\ i^3=-i\ ,\ i^4=1\ ,\ i^5=i\ ,\ i^6=-1\ ,\dots$$

と続いていきます。覚えておくと便利な計算として

$$(x\pm iy)^2=x^2\pm 2ixy+i^2y^2=x^2\pm 2ixy-y^2$$
$$(x+iy)(x-iy)=x^2+ixy-ixy+i^2y^2=x^2-y^2$$

具体的に数値を与えた計算例として

$$(2+3i)+(3+4i)=2+3+(3+4)i=5+7i$$
$$(1+2i)(3+4i)=1\times 3+(2\times 3)i+(1\times 4)i+(2\times 4)i^2=3+10i-8=-5+10i$$
$$\frac{5+5i}{2-3i}+\frac{10}{3+2i}=\frac{(5+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}+\frac{10(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{10-15+i(10+15)}{13}+\frac{30-20i}{13}=\frac{25}{13}+\frac{5}{13}i$$

このように、実数だけの計算よりは面倒になります。

複素数 z の平方根 $z^{1/2}$ を求めます。$w^2=z$ となる複素数 w があるなら w は z の平方根なので、w が分かればいいです。$w=a+ib$ (a,b は実数) として

$$x+iy=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$$

実部は実部、虚部は虚部でそれぞれ成立している必要があるので (i のあるなしで区別しているため実部と虚部は混ざらない)

$$x=a^2-b^2\ ,\ y=2ab$$

これから

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=x^2+y^2$$

となるので

$$a^2+b^2=\sqrt{x^2+y^2}$$

よって

$$a^2=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})\ ,\ b^2=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})$$

y の正負で a,b の符号が変わります。x,y が与えられたとき

$$a^2(a^2-x)=\frac{y^2}{4}\ ,\ b^2(b^2+x)=\frac{y^2}{4}\ ,\ b=\frac{y}{2}a$$

から、ab 平面における交点の位置（これらの解となる a,b）は

$$x>0,\ y>0:\ a>\sqrt{x},\ b>0;\ a<-\sqrt{x},\ b<0\ \Rightarrow\ \text{右上か左下}$$
$$x>0,\ y<0:\ a>\sqrt{x},\ b<0;\ a<-\sqrt{x},\ b>0\ \Rightarrow\ \text{右下か左上}$$
$$x<0,\ y>0:\ a>0,\ b>\sqrt{x};\ a<0,\ b<-\sqrt{x}\ \Rightarrow\ \text{右上か左下}$$
$$x<0,\ y<0:\ a>0,\ b<-\sqrt{x};\ a<0,\ b>\sqrt{x}\ \Rightarrow\ \text{右下か左上}$$

x が正負どちらでも、$y>0$ なら $a,b>0$ か $a,b<0$、$y<0$ なら $a>0,b<0$ か $a<0,b>0$ なので

$$y>0: a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$y<0: a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

$y=0$ では $a=\pm\sqrt{x}$ です。よって、$y\geq 0$ なら $s=1$、$y<0$ なら $s=-1$ とすれば、z の平方根は

$$\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+is\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}})$$

となります。例えば、i では

$$i^{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\quad (x=0\ ,\ y=1) \tag{1}$$

となります。

具体的に $z=2+4i$ として今の手順を行ってみます。$w=a+ib$ として

$$z=w^2$$
$$2+4i=a^2-b^2+2iab$$

これから

$$2=a^2-b^2\ ,\ 2=ab$$

なので

$$
\begin{aligned}
0 &= a^2 - \frac{4}{a^2} - 2 \\
&= a^4 - 2a^2 - 4 \\
a^2 &= 1 \pm \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

$a^2 > 0$ なので $a^2 = 1 + \sqrt{5}$ です。b^2 は

$$
b^2 = \frac{4}{a^2} = \frac{4}{1+\sqrt{5}} = -\frac{4(1-\sqrt{5})}{4} = \sqrt{5} - 1
$$

$ab = 2$ から、a, b の符号は同じなので

$$
\pm w = \pm(\sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-1})
$$

2 乗してみれば

$$
w^2 = (\sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-1})^2 = 1 + \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) + i2\sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = 2 + 4i = z
$$

となっているのが確かめられます。

表記ですが、実数 $x > 0$ のとき $\sqrt{x} > 0$ とされますが (例えば $\sqrt{25} = 5$)、複素数を扱っているときは $\sqrt{z} = \pm w$ とされます。紛らわしいので、ここではルートを使わずに 1/2 で表記して区別しています (実数では $\sqrt{x}$ と $x^{1/2}$ は同じなので紛らわしいままですが)。また、一般向けの複素数の話でよく出てくる $\sqrt{-1} = i$ の表記は計算間違えの原因にもなるので注意が必要です (後でもう 1 度触れます)。

複素数 $z = x + iy$ から $x - iy$ としたものは、複素共役 (complex conjugate) と呼ばれ、z^* や $\bar{z}$ と表記されます。複素共役はもとの複素数の虚部の符号を反転させたものです。i^* は $-i$ です。$1/z$ の複素共役は

$$
(\frac{1}{z})^* = (\frac{1}{x+iy})^* = (\frac{x-iy}{x^2+y^2})^* = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{z^*}
$$

分数の計算は複素共役を使えば

$$
\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}
$$

と書けます。

複素数の絶対値は

$$
|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2+y^2}
$$

と定義されています。

複素共役の関係

- $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z + z^*)$, $\mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2i}(z - z^*)$

$$z + z^* = x + iy + x - iy = 2x\ ,\ z - z^* = x + iy - x + iy = 2iy$$

- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\\ (z_1 + z_2)^* &= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)\\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2\\ &= z_1^* + z_2^*\end{aligned}$$

- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

$$\begin{aligned}&z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &z_1^* z_2^* = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (z_1 z_2)^*\end{aligned}$$

- $(\dfrac{1}{z})^* = \dfrac{1}{z^*}$ $((z^{-1})^* = (z^*)^{-1})$
  $1 = 1^*$ なので

$$z\frac{1}{z} = 1 = 1^* = (z\frac{1}{z})^* = z^*(\frac{1}{z})^*$$

  これから

$$\begin{aligned}z^*(\frac{1}{z})^* &= 1\\ (\frac{1}{z})^* &= (z^*)^{-1} \quad ((z^*)^{-1} = \frac{1}{z^*})\end{aligned}$$

- $(\dfrac{z_1}{z_2})^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

$$(\frac{z_1}{z_2})^* = (z_1\frac{1}{z_2})^* = z_1^*(\frac{1}{z_2})^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

絶対値の関係

- $|z| = |z^*|$

$$|z| = |x + iy| = |x - iy| = |z^*|$$

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
  $|z_1||z_2|$ は

$$|z_1||z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2}$$

  $|z_1 z_2|$ は

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$$

  ルートの中は

$$\begin{aligned}(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 &= (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2\end{aligned}$$

  よって

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

$$|z_1 + z_2|^2 = ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2))((x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2\ ,\ |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$$

  なので

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$, $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$
  $\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) = x_1x_2 + y_1y_2$ から

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = |z_1 - z_2|^2$$

- 三角不等式：$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
  z の実部は

$$\mathrm{Re}z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

なので

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) \le |z_1 z_2^*| = |z_1||z_2^*| = |z_1||z_2|$$

これから

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1|+|z_2|)^2 \\ |z_1+z_2| &\le |z_1|+|z_2| \end{aligned}$$

$|z_1 - z_2|$ では z_2 の符号をさせますが、右辺は $|z_2|$ なので変更されません。また、項が増えても

$$|z_1+z_2+z_3| \le |z_1+z_2| + |z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

となるだけです。

- $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$, $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \ \Rightarrow\ |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ なので、$|z_1 - z_2| \ge |z_2| - |z_1|$ です。z_2 の符号を変えても右辺は変わらないので、$|z_1 + z_2|$ でも同じです。

複素数を R^2 から作ったことから分かるように、2 次元デカルト座標の点として複素数は与えられます。$z = x + iy$ は (x, y) なので横軸を x 軸、縦軸を y 軸として 2 次元平面を作り、平面上の点を $z = (x, y)$ と与えます。2 点間の距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ なので、絶対値 $|z|$ が対応します。2 点間の差はベクトルの差と同じように

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

となり、2 点間の距離は $|z_1 - z_2|$ です。ユークリッド空間との違いは、y 軸が虚部 y に対応していることです。このため、実数の x 軸は実軸 (real axis)、虚数の y 軸は虚軸 (imaginary axis) と言われます。また、複素平面の $y > 0$ を上半面 (upper half plane)、$y < 0$ を下半面 (lower half plane) と言います。

実軸と $z = (x, y) \neq (0, 0)$ の間の角度 θ (実数) は z の偏角 (argument) と呼ばれ

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

と与えられます。これから

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

このように偏角を使った形式を極形式 (polar form) と言います。z^{-1} は、$zz^{-1} = 1$ なので

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

から

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

となります。

三角関数になっていることからわかるように、角度を 2π 変えても同じ z の値になります (原点と点を結ぶ直線は一周させれば同じ位置に戻ってくる)。このことをはっきりさせるための表記があり、実軸からの角度 θ_0 を $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ （一周分の範囲なので、$0 \leq \theta_0 < 2\pi$ でも同じ)、n を整数として、z の偏角 θ を

$$\arg z = \theta = \theta_0 + 2n\pi$$

と書きます。θ_0 は Arg$z$ と表記され、偏角の主値 (principal argument) と呼ばれます。大文字 A と小文字 a で区別されているので、書くときに注意が必要です。

積 z_1z_2 の偏角は

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= |z_1||z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}$$

と、$z = z_1z_2,\ |z| = |z_1z_2| = |z_1||z_2|$ から

$$\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

z^{-1} とでは

$$z_1z_2^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

なので

$$\arg(z_1z_2^{-1}) = \arg z_1 - \arg z_2$$

となります。

極形式での z^n は加法定理を使うと

$$z^2 = zz = |z|^2(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta) = |z|^2(\cos 2\theta + i\sin\theta)$$
$$z^3 = zz^2 = |z|^3(\cos(2\theta+\theta) + i\sin(2\theta+\theta)) = |z|^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

と続いていくのが分かるので

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

n は正の整数です。これをド・モアブル (De Moivre) の定理と言います。

ド・モアブルの定理を利用することで $z^n = w$ (n は $n \geq 2$ の整数) を z について解けます。言い換えれば、w の n 乗根 z を求められます。w を

$$w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi) \quad (0 \leq \phi < 2\pi)$$

とすれば

$$|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |w|(\cos(\phi+2\pi m) + i\sin(\phi+2\pi m))$$

三角関数は 2π ごとに同じ値になるので、m を整数として $2\pi m$ を加えています。これから

$$|z| = |w|^{1/n}\ ,\ \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$$

なので、w の n 乗根 z は

$$z = |w|^{1/n}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}))$$

この解は m によって区別されるので、z_m として

$$z_m = |w|^{1/n}(\cos\phi_m + i\sin\phi_m) \quad (\phi_m = \frac{\phi+2\pi m}{n}) \tag{2}$$

ϕ_m は $m=0$ から n に対して

$$\frac{\phi}{n}\ ,\ \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\ ,\ \frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{\phi}{n} + 2\pi - \frac{2\pi}{n}\ ,\ \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

なので、$m=0$ から $n-1$ までは $0 \leq \phi_m < 2\pi$ で、$m=n$ から $m=0$ に戻ります。というわけで、複素数 w の n 乗根は、$m=0$ から $n-1$ までの n 個に区別される z_m です。

今の結果を $w = |w|(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$ に使うと

$$(-1)^{1/2} = (\cos\frac{\pi+2\pi m}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi m}{2}) = i\sin(\frac{\pi}{2}+\pi m)$$

偏角が $\pi/2$ なら i、$3\pi/2$ なら $-i$、と続いていくので、偏角の範囲 0 から 2π において $(-1)^{1/2}$ は $\pm i$ となります。このように、偏角を指定せずに $\sqrt{-1}=i$ としてしまうと混乱の原因になります。

最後に指数関数と対数関数に触れておきます。実数 x による指数関数 e^x のテーラー展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

これが複素数でも成立しているとします。つまり、純虚数 iy でも

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots$$

この展開と三角関数の展開 (θ は実数)

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots \ ,\ \sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots$$

から

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - \frac{1}{3!}iy^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \frac{1}{5!}iy^5 \cdots \\
&= (1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots) + i(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots) \\
&= \cos y + i\sin y
\end{aligned}$$

これはオイラーの公式と呼ばれます。符号を反転させると

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$$

三角関数との関係は

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \ ,\ \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

となっています。$e^z = e^{x+iy}$ は実数での $e^{a+b} = e^a e^b$ から

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

と定義されます。また、級数は

$$|\frac{z^k}{k!}| = \frac{|z|^k}{k!}$$

から

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\frac{z^k}{k!}| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} < \infty$$

となるので、e^z は絶対収束します。
　指数関数を使えば、極形式は偏角を θ として

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$$

極形式はこの形を指すことが多いです。覚えておくと便利なものとして

$$e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\ ,\ e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = 1\ ,\ e^{i3\pi/2} = -i\ ,\ e^{i2\pi} = 1$$
$$e^{1+i\pi/2} = e^1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = ie$$

　e^z の関係

- $e^{z+w} = e^z e^w$

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{x+iy+a+ib} = e^{x+a+i(y+ib)} = e^{x+a}(\cos(y+b) + i\sin(y+b)) \\
&= e^{x+a}(\cos y\cos b - \sin y\sin b + i(\sin y\cos b + \cos y\sin b)) \\
&= e^{x+a}(\cos y + i\sin y)(\cos b + i\sin b) \\
&= e^{x}(\cos y + i\sin y)e^{a}(\cos b + i\sin b) \\
&= e^{x+iy}e^{a+ib} \\
&= e^z e^w
\end{aligned}$$

- $(e^z)^* = e^{z^*},\ (e^{iy})^* = e^{-iy}$

$$(e^z)^* = e^x(e^{iy})^* = e^x(\cos y + i\sin y)^* = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^{x-iy} = e^{z^*}$$

$x = 0$ なら、$(e^{iy})^* = e^{-iy}$ です。

- $|e^{x+iy}|=e^x$

$$|e^{x+iy}|=|e^xe^{iy}|=|e^x||e^{iy}|=e^x\sqrt{(\cos y+i\sin y)(\cos y-i\sin y)}=e^x$$

- $\dfrac{1}{e^z}=e^{-z}$

$$e^z\frac{1}{e^z}=1\ ,\ e^ze^{-z}=e^{z-z}=e^0=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{e^z}=e^{-z}\qquad((e^z)^{-1}=e^{-z})$$

もしくは、$Z=e^z$ として

$$\frac{1}{e^z}=\frac{1}{Z}=\frac{Z^*}{|Z|^2}=\frac{1}{|e^z|^2}e^{z^*}=\frac{1}{(e^x)^2}e^x(\cos y-i\sin y)=e^{-x}(\cos y-i\sin y)=e^{-x}e^{-iy}=e^{-z}$$

- $e^{z+i2\pi n}=e^z$ (n は整数)

$$e^{z+i2\pi n}=e^ze^{i2\pi n}=e^z(\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n)=e^z$$

また、$z=2\pi n$ なら $e^z=1$ です。

指数関数を使うと n 乗根が分かりやすく求められます。$w=z^n$ を

$$w=z^n=Re^{i\phi}\qquad(R=|w|\ ,\ \phi=\mathrm{Arg}w)$$

これに対して、z を

$$z=re^{i\theta}\qquad(r=|z|\ ,\ \theta=\mathrm{Arg}z)$$

そうすると、z^n は

$$z^n=r^ne^{in\theta}$$

と書けるので

$$Re^{i\phi}=r^ne^{in\theta}$$

から

$$R = r^n \ \Rightarrow \ r = R^{1/n} \ , \ e^{in\theta} = e^{i\phi} \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\phi}{n}$$

θ, ϕ は

$$e^{i\theta} = e^{i\theta+2i\pi} = e^{i\theta+4i\pi} = \cdots \qquad (e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1)$$

として 2π での周期を持つことから、m を $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ として

$$\theta = \frac{\phi + 2\pi m}{n}$$

よって、w の n 乗根 z_m は

$$z_m = |w|^{1/n} e^{i\phi_m} = |w|^{1/n}(\cos\phi_m + i\sin\phi_m) \quad (\phi_m = \frac{\phi + 2\pi m}{n})$$

となり、(2) と同じになります。例えば、i では $z^n = Re^{i\phi} = i = e^{i\pi/2}$ として、$n = 2$ にすることで

$$i^{1/2} = z = re^{i\theta} = e^{i(\pi/2+2\pi m)/2} = e^{i(\pi/4+m\pi)} = \cos(\frac{\pi}{4} + m\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + m\pi) \qquad (r = R^{1/2} = 1)$$

このとき独立なのは $m = 0$ と $m = 1$ で

$$m = 0: \ \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$$m = 1: \ \cos(\frac{\pi}{4} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

となり、(1) と一致します。$m = 2$ では $m = 0$ と、$m = 3$ では $m = 2$ と一致、というように続いていきます。$-1 + i$ の 3 乗根では、$z^n = Re^{i\phi} = -1 + i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ として ($R = \sqrt{2}$)、$n = 3$ にすることで

$$z = re^{i\phi} = 2^{1/6} e^{i(3\pi/4+2m\pi)/3}$$

となります。この場合では独立なのは 3 つあって $m = 0, 1, 2$ です。

指数関数と対数関数 log は、a, b を実数として

$$\log a = b$$

$$e^b = a$$

実数であれば e^b と $\log a$ のみが対応しますが、複素数での指数関数は $2\pi n$ の周期を持つために

$$e^z = e^{z+i2\pi} = e^{z+i4\pi} = \cdots = w$$

となるので、これら全てが $\log w$ に対応します。極形式にすると分かりやすく、z は

$$z = |z|e^{i\theta} = e^{\log|z|}e^{i\theta} = e^{\log|z|+i\theta} \quad (\theta = \arg z)$$

と書けることから、n を整数として

$$\log z = \log|z| + i\theta = \log|z| + i(\theta_0 + 2n\pi) \quad (0 \le \theta_0 < 2\pi)$$

$|z|$ は実数なので $\log|z|$ は通常の対数関数です。このように log は 1 つの複素数 z に対して整数 n で区別されるいくつもの値を持ちます。1 つの変数に対して複数の値を持つとき、多価関数 (multivalued function) と呼ばれます。今は整数 n が無限個あるので、無限多価関数と言われます。1 つの値しか持たなければ 1 価関数です。

1 つの値にするためには偏角の範囲を制限すればよく、偏角の主値 θ_0 に制限した場合を

$$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\theta_0 \quad (\theta_0 = \mathrm{Arg} z)$$

と表記し、対数関数の主値と言います。$\mathrm{Log} z = w$ とすれば

$$z = e^w = e^{\mathrm{Log} z} = e^{\mathrm{Log} z + i2\pi n}$$

から

$$\log z = \mathrm{Log} z + i2\pi n$$

となっています。対数関数の主値は例えば

$$\mathrm{Log} ie = \log|ie| + i\frac{\pi}{2} = 1 + i\frac{\pi}{2} \quad (ie = |e|i\sin\frac{\pi}{2} = |e|e^{i\pi/2})$$

として求められます。また、偏角の制限が異なれば値は当然変わり、$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\theta_0}$ $(\theta_0 = \mathrm{Arg} z = \pi/4)$ では

$$\log[1+i] = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \quad (0 \le \arg(1+i) < 2\pi)$$

$$\log[1+i] = \log\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4} \quad (\pi \le \arg(1+i) < 3\pi)$$

となります。

偏角がある領域 D に制限された $\log z$ は、D における $\log z$ の枝 (branch) や分枝と呼ばれます。制限は複素平面に無限に長い直線を書き込んでその先に行けなくするように見えることから (例えば 0 から $\pi/4$ に制限するなら角度 $\pi/4$ の直線を書く)、多価関数の値を 1 つにすることを切断 (cut) や分岐切断 (branch cut) と言います。この話が出てくる例は「複素積分の例」で扱っています。

実数での対数関数の関係 $\log ab = \log a + \log b$ は複素数でも成立していて

$$
\begin{aligned}
\log z_1z_2 =& \log|z_1z_2| + i\arg(z_1z_2) \\
=& \log|z_1||z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2) \\
=& \log|z_1| + i\arg z_1 + \log|z_2| + i\arg z_2 \\
=& \log z_1 + \log z_2
\end{aligned}
$$

となっています。

ここで求めた関係をまとめると

- 複素数 $z = x + iy$ の平方根：$\pm(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + is\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}})$
  s は $y > 0$ なら $+1$、$y < 0$ なら -1。
- $(\dfrac{1}{z})^* = \dfrac{1}{z^*}$
- $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}(z + z^*)$, $\mathrm{Im}z = \dfrac{1}{2i}(z - z^*)$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$
- $(\dfrac{1}{z})^* = \dfrac{1}{z^*}$ $((z^{-1})^* = (z^*)^{-1})$
- $(\dfrac{z_1}{z_2})^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$
- $|z| = |z^*|$
- $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$, $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$
- 三角不等式：$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
- $\arg(z_1z_2^{-1}) = \arg z_1 - \arg z_2$
- ド・モアブルの定理：$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
- 複素数 $w = |w|e^{i\phi}$ の n 乗根：$|w|^{1/n}e^{i(\phi+2\pi m)/n} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots n-1)$
- $e^{z+w} = e^ze^w$
- $(e^z)^* = e^{z^*}$, $(e^{iy})^* = e^{-iy}$

- $|e^{x+iy}| = e^x$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $e^{z+i2\pi n} = e^z$ (n は整数)
- $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$