積分方程式

積分方程式の基本的な話を見ていきます。ここではボルテラ型と呼ばれるものを扱っていき、それの解を求める方法の１つである逐次近似による方法を見ていきます。
入門的な物理の話では積分方程式にはそうそう出会わないです。積分方程式は工学、経済学、数理生態学の方でも使われています。
ここでの話は積分核が積分領域で特異点を持たない連続な関数としています。

積分方程式は未知関数の積分を含んでいる方程式です。積分がいるので、その積分が定積分なのか不定積分なのかで分類されていて、定積分をフレドホルム (Fredholm) 型、不定積分をボルテラ (Volterra) 型と呼びます。ここで言う不定積分の形は

$$\int_a^x f(y)dy$$

で与えられているものです (a は定数)。積分の意味合いは通常の不定積分の形

$$\int f(x)dx$$

と同じです (微分すれば一致します)。さらに、フレドホルム型、ボルテラ型の両方とも第１種から第３種と同次形があります。それぞれの基本的な形は

- フレドホルム型

$$\text{第 1 種}: \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{1a}$$

$$\text{第 2 種}: \phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{1b}$$

$$\text{第 3 種}: A(x)\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{1c}$$

$$\text{同次}: \phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = 0 \tag{1d}$$

- ボルテラ型

$$\text{第 1 種}: \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2a}$$

$$\text{第 2 種}: \phi(x) - \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2b}$$

$$\text{第 3 種}: A(x)\phi(x) - \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2c}$$

$$\text{同次}: \phi(x) - \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = 0 \tag{2d}$$

$\phi(x)$ が未知関数でそれ以外は既知だとします。$K(x,y)$ は積分方程式の核 (kernel)、もしくは積分核と呼ばれます。第１種は未知関数が積分の中にしかいない場合、第２種は積分の外にも未知関数がいる場合、第３種は既知関数が

積分の外の未知関数にくっついている場合で基本的に第 2 種と同じです。同次は第 2 種で $f(x)=0$ とした場合です。第 2 種フレドホルム型にいる λ は定数パラメータで、ボルテラ型の場合と違いフレドホルム型ではこの λ の値によって扱いが変わるので λ を入れて定義されます (ボルテラ型にも λ を入れて定義している場合もあります)。ここではボルテラ型を見ていきます。また、積分核 $K(x,y)$ は積分範囲において連続な関数だとします。$K(x,y)$ が特異点を含んでいる場合を特異核と呼び、扱いが難しくなります。

まずは、物理に積分方程式が絡んでいる例を力学の問題を使って示します。曲線 C に沿って曲線上の始点から終点まで重力によって転がっていく質点を考え、始点から終点までの所要時間 T を求めます。2 次元とすれば、xy 平面において (y 座標が高さ)、曲線上の質点の位置 $(x(t),y(t))$ から速度 v が

$$v(t)=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$$

と与えられます (t は時間)。摩擦とかを考えていないので、運動エネルギーと位置エネルギーによってエネルギー保存から

$$\frac{1}{2}mv^2(t)=mg(h-y(t))$$

m は質点の質量、g は重力定数、h は始点の高さです。始点での速度は 0 としています。これに速度 v を入れれば

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=\ 2g(h-y(t)) \tag{3}$$

曲線を y 座標を変数に持たせて $x=C(y)$ として、座標を $(C(y),y)$ で与えます。そうすると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dC(y)}{dt}=\frac{dC(y)}{dy}\frac{dy}{dt}$$

となるので、(3) の左辺は

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=(\frac{dC(y)}{dy})^2(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=(1+(\frac{dC(y)}{dy})^2)(\frac{dy}{dt})^2$$

dC/dy を $C'(y)$ と書くことにして

$$(\frac{dy}{dt})^2=\frac{2g(h-y(t))}{1+C'^2(y)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\ \pm\sqrt{\frac{2g(h-y(t))}{1+C'^2(y)}}$$

落下しているのでマイナスを選んで

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{\frac{2g(h-y(t))}{1+C'^2(y)}}$$

逆にして

$$\frac{dt}{dy}=-\sqrt{\frac{1+C'^2(y)}{2g(h-y(t))}}$$

これを積分すれば、始点から終点までの時間 T を取り出せるので、終点の高さから始点の高さまでの範囲で y 積分して

$$T=\int_{h_0}^{h}\frac{dt}{dy}dy=-\int_{h_0}^{h}\sqrt{\frac{1+C'^2(y)}{2g(h-y)}}dy$$

h_0 が終点の高さです。ここで

$$\phi(y)=\sqrt{\frac{1+C'^2(y)}{2g}}$$

とすれば

$$T=-\int_{h_0}^{h}\frac{\phi(y)}{\sqrt{h-y}}dy \tag{4}$$

これに曲線の形を与えれば (ϕ は曲線を与えれば決まる)、後は積分が実行できるかという問題になります。

これだと積分の問題でしかないので状況を変えます。今の状況を、時間 T が始点の高さ h の関数として既知で、曲線の形が与えられていないと変更します。この変更によって、第 1 種ボルテラ型の積分方程式になります。つまり、曲線の形を与えて所要時間を求めるという問題を、所要時間から曲線を求める問題と読み替えることで積分方程式が出てきます。これは曲線上の始点の位置 (高さ) を変えて終点までの時間を計測して T を h の関数として与え、その情報から曲線の形を求めるという話になっています。これは有名な例で、最初に扱った人の名前からアーベル (Abel) 積分方程式と呼ばれています。

次に問題になるのが、この積分方程式が解けるのかということです。ここでの解けたというのは、$\phi(x)=\sim$ の形にすることです。記号を (2a) に合わせるために時間 T を $f(x)$、高さ h を x にして、マイナスでなくても同じなので外して

$$f(x)=\int_{a}^{x}\frac{\phi(y)}{\sqrt{x-y}}dy$$

さらに一般化して

$$f(x)=\int_{a}^{x}\frac{\phi(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy \quad (0<\alpha<1)$$

とします。まずは変数を書き換えて

$$f(x')=\int_{a}^{x'}\frac{\phi(y)}{(x'-y)^{1-\alpha}}dy$$

として、両辺に $(x-x')^{-\alpha}$ をかけて

$$\frac{f(x')}{(x-x')^{\alpha}}=\frac{1}{(x-x')^{\alpha}}\int_{a}^{x'}\frac{\phi(y)}{(x'-y)^{1-\alpha}}dy$$

この x' を a から x まで積分するようにして

$$\int_{a}^{x}dx'\frac{f(x')}{(x-x')^{\alpha}}=\int_{a}^{x}\frac{dx'}{(x-x')^{\alpha}}\int_{a}^{x'}\frac{\phi(y)}{(x'-y)^{1-\alpha}}dy$$

右辺は 2 重積分なので、2 重積分での積分順序の交換から (積分範囲による三角形の形成の話)、y の範囲は x' の範囲から $a \sim x$ で、$y \leq x'$ なので x' の下限は y で上限は x となって

$$\int_a^x \frac{dx'}{(x-x')^\alpha}\int_a^{x'}\frac{\phi(y)}{(x'-y)^{1-\alpha}}dy = \int_a^x dy\int_y^x dx'\frac{\phi(y)}{(x-x')^\alpha(x'-y)^{1-\alpha}} \tag{5}$$

変数変換として

$$\beta = \frac{x'-y}{x-y} \qquad (x' = (x-y)\beta + y)$$

を行うと

$$\begin{aligned}\int_y^x dx'\frac{1}{(x-x')^\alpha(x'-y)^{1-\alpha}} &= \int_0^1 d\beta\ (x-y)\frac{1}{(1-\beta)^\alpha\beta^{1-\alpha}}\frac{1}{(x-y)^\alpha}\frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}\\ &= \int_0^1 d\beta\frac{1}{(1-\beta)^\alpha\beta^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

これはベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 dz\ z^{p-1}(1-z)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

の定義そのものです。$\Gamma(p)$ はガンマ関数です。よって $p=\alpha$、$1-q=\alpha$ から

$$\int_a^x dy\ \phi(y)\int_y^x dx'\frac{1}{(x-x')^\alpha(x'-y)^{1-\alpha}} = B(\alpha,1-\alpha)\int_a^x dy\ \phi(y)$$

というわけで

$$\int_a^x dy\ \phi(y) = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\int_a^x dx'\frac{f(x')}{(x-x')^\alpha}$$

これを x で微分することで

$$\phi(x) = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(x')}{(x-x')^\alpha}dx' \tag{6}$$

よって、形式的にはこれで解けたことになります。ただし、右辺の微分が、2 変数に対する関係

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dy\ g(x,y) = g(x,x) + \int_a^x dy\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$$

から分かるように

$$\frac{f(x)}{(x-x)^\alpha}$$

で発散します。これは部分積分によって

$$
\begin{aligned}
\int_a^x dx' \frac{f(x')}{(x-x')^\alpha} &= -\int_{x-a}^0 dz \frac{f(x-z)}{z^\alpha} \qquad (z = x - x') \\
&= -\Big[\frac{z^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} f(x-z)\Big]_{x-a}^0 + \frac{1}{-\alpha+1}\int_{x-a}^0 dz\ z^{-\alpha+1}\frac{df(x-z)}{dz} \\
&= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(a) + \frac{1}{1-\alpha}\int_a^x dx'\ (x-x')^{1-\alpha}\frac{df(x')}{dx'} \qquad (\frac{d}{dx'} = \frac{dz}{dx'}\frac{d}{dz} = -\frac{d}{dz})
\end{aligned}
$$

と変形します。2 行目の第一項は $0 < \alpha < 1$ なので $z = 0$ で 0 になります。これから

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(x')}{(x-x')^\alpha} dx' &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(a) + \frac{1}{1-\alpha}\int_a^x dx'(x-x')^{1-\alpha}\frac{df(x')}{dx'}\Big) \\
&= (x-a)^{-\alpha} f(a) + \int_a^x (x-x')^{-\alpha}\frac{df(x')}{dx'} dx'
\end{aligned}
$$

となって、微分が実行できます。よって (6) は

$$
\phi(x) = \frac{1}{B(\alpha, 1-\alpha)}\Big(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{1}{(x-x')^\alpha}\frac{df(x')}{dx'} dx'\Big) \tag{7}
$$

これで解けたことになります。$\alpha = 1/2$ で (4) の解になります。後は $f(x)$ (時間の関数形) を与えて積分が実行できるかということになります。

元のアーベル積分方程式 (4) に戻して、$x = h,\ a = h_0,\ \alpha = 1/2$ とし、マイナスをつけて、所要時間 T は定数で

$$
T = f = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}
$$

と与えられている場合を計算してみます ($l > 0$)。それぞれを (7) に入れると

$$
\begin{aligned}
\phi(h) = -\frac{1}{B(1/2, 1/2)}\frac{\pi}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{l}{2g}} &= -\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{\pi}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{l}{2g}} \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{l}{2g}} \qquad (\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ ,\ \Gamma(1) = 1) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{l}{2g}} \\
\sqrt{\frac{1 + C'^2(h)}{2g}} &= -\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{l}{2g}} \\
\frac{1 + C'^2(h)}{2g} &= \frac{1}{h}\frac{l}{2g} \\
C'^2(h) &= \frac{l}{h} - 1
\end{aligned}
$$

曲線は $x = C(y)$ と与えていて、h は曲線の y 座標なので C' は dx/dy に置き換えられます。そうすると、ルートの符号はプラスを選ぶことにして

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{l}{y}-1}$$

$$dx=\sqrt{\frac{l-y}{y}}dy$$

$$=\sqrt{\frac{1-y/l}{y/l}}dy$$

$$=2lu\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}du \qquad (u=\sqrt{y/l}\ ,\ du=\frac{1}{2}\frac{1}{l}\frac{1}{\sqrt{y/l}}dy)$$

$$x=2l\int\sqrt{1-u^2}du$$

$$=2l\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \qquad (u=\sin\theta)$$

$$=2l\int\cos^2\theta d\theta$$

$$=l(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+D$$

D は積分定数です。ちなみに、積分は

$$\sqrt{\frac{y}{l-y}}=\tan\varphi \qquad (\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{l-y}})$$

と置き換えて y を φ の式に書き直せば単純な三角関数の積分に持っていくことも出来ます。

$u=\sin\theta$ として、加法定理を使うことで x,y は角度のパラメータ θ によって

$$x=l(\sin\theta\cos\theta+\theta)=\frac{l}{2}(\sin 2\theta+2\theta)=\frac{l}{2}(\sin\theta'+\theta')+D$$

$$y=lu^2=l\sin^2\theta=\frac{l}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{l}{2}(1-\cos\theta')$$

となって、曲線 C はサイクロイドになっていることが分かります。

第 1 種ボルテラ型の例としてアーベル積分方程式を解きましたが、今度は第 2 種ボルテラ型を扱います。これを解く方法として逐次近似による方法を使います。証明は省いて結果だけを使います。第 2 種ボルテラ型

$$\phi(x)-\int_a^x dy\ K(x,y)\phi(y)=f(x)$$

での積分核 $K(x,y)$ から、

$$
\begin{aligned}
\hat{K}(x,y) =& \ K(x,y) \\
\hat{K}^2(x,y) =& \int_y^x d\tau \ K(x,\tau)K(\tau,y) \\
\hat{K}^3(x,y) =& \int_y^x d\tau K(x,\tau)\hat{K}^2(\tau,y) = \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,y) \\
\hat{K}^n(x,y) =& \int_y^x K(x,\tau)\hat{K}^{n-1}(\tau,y)d\tau \\
=& \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\cdots K(\tau_{n-2},\tau_{n-1})K(\tau_{n-1},y)
\end{aligned}
$$

と作用していく $\hat{K}$ を定義します。これから

$$
G(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^{n+1}(x,y)
$$

としたとき、第 2 種ボルテラ型の積分方程式の解は

$$
\phi(x) = \ f(x) - \int_a^x dy \ G(x,y)f(y) \tag{8}
$$

と与えられます。第二項は単に $\hat{K}^n$ を入れていけば良いので

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) + \int_a^x dy \ \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^{n+1} f(y) \\
&= f(x) + \int_a^x dy \ \big(\hat{K}(x,y)f(y) + \hat{K}^2(x,y)f(y) + \cdots\big) \\
&= f(x) + \int_a^x dy \ \Big(K(x,y)f(y) + \int_y^x d\tau K(x,\tau)K(\tau,y)f(y) + \cdots\Big)
\end{aligned}
$$

となっています。これが逐次近似である理由は後で見ます。

逐次近似による方法の使用例として

$$
\phi(x) - \lambda \int_0^x dy \ e^{x-y}\phi(y) = f(x) \tag{9}
$$

という積分方程式を使ってみます。このとき $K(x,y)$ は

$$
K(x,y) = \lambda e^{x-y}
$$

そうすると

$$
\begin{aligned}
\hat{K} =& \ \lambda e^{x-y} \\
\hat{K}^2 =& \ \lambda^2 \int_y^x d\tau e^{x-\tau} e^{\tau-y} = e^{x-y}\int_y^x d\tau = \lambda^2 e^{x-y}(x-y) \\
\hat{K}^3 =& \ \lambda^3 \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 e^{x-\tau_1} e^{\tau_1-\tau_2} e^{\tau_2-y} \\
=& \ \lambda^3 e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \\
=& \ \lambda^3 e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 (\tau_1 - y) \\
=& \ \lambda^3 e^{x-y} \int_0^{x-y} d\tau \ \tau \\
=& \ \lambda^3 \frac{1}{2} e^{x-y} (x-y)^2
\end{aligned}
$$

$\hat{K}^n$ はこれを繰り返していくので

$$
\begin{aligned}
\hat{K}^{n+1} &= \lambda^{n+1} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-1}} d\tau_n e^{x-\tau_1} e^{\tau_1-\tau_2} \cdots e^{\tau_n - y} \\
&= \lambda^{n+1} e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-1}} d\tau_n \\
&= \lambda^{n+1} e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} (\tau_{n-1} - y) \\
&= \lambda^{n+1} e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-3}} d\tau_{n-2} \frac{1}{2} (\tau_{n-2} - y)^2 \\
&= \lambda^{n+1} e^{x-y} \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-4}} d\tau_{n-3} \frac{1}{3 \times 2} (\tau_{n-3} - y)^3 \\
&= \lambda^{n+1} e^{x-y} \frac{(x-y)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

n 個の積分に対して同じことを繰り返していくので、このようになります。これによって $G(x,y)$ は

$$
\begin{aligned}
G(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^{n+1} = -e^{x-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}(x-y)^n}{n!} =& \ -\lambda e^{x-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-y)^n}{n!} \\
=& \ -\lambda e^{x-y} e^{\lambda(x-y)} \\
=& \ -\lambda e^{(\lambda+1)(x-y)}
\end{aligned}
$$

よって (8) から

$$
\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x dy \ e^{(\lambda+1)(x-y)} f(y)
$$

という解になります。

この解法は第 1 種でも使えます。第 1 種の

$$\int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x K(x,y)\phi(y)dy = K(x,x)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\phi(y)dy$$

から $K(x,x) \neq 0$ なら

$$\begin{aligned}K(x,x)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\phi(y)dy &= \frac{df(x)}{dx}\\ \phi(x) + \int_a^x \frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\phi(y)dy &= \frac{1}{K(x,x)}\frac{df(x)}{dx}\end{aligned}$$

となって、第 2 種の形に持っていけます。なので、これの解も

$$\frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)$$

を積分核として (8) に入れて、$f(x)$ を $K^{-1}(x,x)df(x)/dx$ とすればいいです。ただし、$K(x,x) \neq 0$ という条件がつきます。

第 1 種の形として (9) と同じ形の積分核を持つ

$$\int_0^x dy\ e^{x-y}\phi(y) = f(x)$$

というのを計算してみます。これを x で微分すれば

$$\phi(x) + \int_0^x dy\ e^{x-y}\phi(y) = \frac{df(x)}{dx}$$

となって、第 2 種の形になります。これは (9) で $\lambda = -1$ としたものなので、$G(x,y)$ は

$$\begin{aligned}G(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty}\hat{K}^n = -e^{x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-y)^n}{n!} &= e^{x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-y)^n}{n!}\\ &= e^{x-y}e^{-(x-y)}\\ &= 1\end{aligned}$$

よって解は

$$\phi(x) = \frac{df(x)}{dx} - \int_0^x dy\ \frac{df(z)}{dz}|_{z=y}$$

となります。
　フレドホルム型のときでも同様の方法が使えます。第 2 種フレドホルム型

$$\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

での積分核に対して $\hat{K}$ を

$$\begin{aligned}
\hat{K}(x,y) =& \ K(x,y) \\
\hat{K}^2(x,y) =& \ \int_a^b d\tau \ K(x,\tau)K(\tau,y) \\
\hat{K}^3(x,y) =& \ \int_a^b K(x,\tau)\hat{K}^2(\tau,y)d\tau = \int_a^b d\tau_1 \int_a^b d\tau_2 K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,y) \\
\hat{K}^n(x,y) =& \ \int_a^b K(x,\tau)\hat{K}^{n-1}(\tau,y)d\tau \\
=& \ \int_a^b d\tau_1 \int_a^b d\tau_2 \cdots \int_a^b d\tau_{n-1} K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\cdots K(\tau_{n-2},\tau_{n-1})K(\tau_{n-1},y)
\end{aligned}$$

と定義し

$$G(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}\hat{K}^n(x,y)$$

とします。これによって第 2 種フレドホルム型の解は

$$\phi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b G(x,y)f(y)dy$$

と与えられ、λ がいて積分範囲の取り方以外はボルテラ型と同じ形になります。
　フレドホルム型の解を求めるのにフレドホルム理論というものがあり、こちらをやることで λ の役割などのフレドホルム型の性質が分かりますが、ここでは省きます。
　逐次近似による方法が何をしているのかを簡単に見ておきます。第 2 種ボルテラ型として

$$\begin{aligned}
&\phi(x) - \int_a^x dy \ K(x,y)\phi(y) = f(x) \\
&\hat{K}(x,y) = \ K(x,y) \\
&\hat{K}^2(x,y) = \ \int_y^x d\tau \ K(x,\tau)K(\tau,y) \\
&\hat{K}^n(x,y) = \ \int_y^x K(x,\tau)\hat{K}^{n-1}(\tau,y)d\tau \\
&\qquad\quad = \ \int_y^x d\tau_1 \int_y^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_y^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} K(x,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\cdots K(\tau_{n-2},\tau_{n-1})K(\tau_{n-1},y)
\end{aligned}$$

とします。$\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots$$

のように展開して元の積分方程式に入れると

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots &= f(x) + \int_a^x dy\ K(x,y)\phi(y) \\
&= f(x) + \int_a^x dy\ K(x,y)(\phi_0(y) + \phi_1(y) + \phi_2(y) + \cdots) \\
&= f(x) + \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_0(y) + \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_1(y) + \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_2(y) + \cdots
\end{aligned}$$

これの両辺の比較から

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= f(x) \\
\phi_1(x) &= \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_0(y) \\
\phi_2(x) &= \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_1(y) \\
\phi_n(x) &= \int_a^x dy\ K(x,y)\phi_{n-1}(y)
\end{aligned}$$

そうすると、$\phi_0(x) = f(x)$ を $\phi_1(x)$ に入れて

$$\phi_1(x) = \int_a^x dy\ K(x,y)f(y)$$

これを ϕ_2 に入れて

$$\begin{aligned}
\phi_2(x) &= \int_a^x dy\ K(x,y)\int_a^y dy_1\ K(y,y_1)f(y_1) \\
&= \int_a^x dy_1\ f(y_1)\int_{y_1}^x dy\ K(x,y)K(y,y_1) \\
&= \int_a^x dy_1\ f(y_1)\hat{K}^2(x,y_1)
\end{aligned}$$

(5) と同じように積分順序の交換をしています。これによって $\phi(x)$ の展開は

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x dy\ K(x,y)f(y) + \int_a^x dy\ \hat{K}^2(x,y)f(y) + \cdots$$

これと、逐次近似による解

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) - \int_a^x dy\ G(x,y)f(y) \\
&= f(x) + \int_a^x dy \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^{n+1}(x,y)f(y) \\
&= f(x) + \int_a^x dy\hat{K}(x,y)f(y) + \int_a^x dy\hat{K}^2(x,y)f(y) + \cdots
\end{aligned}
$$

の各項は対応していることが分かります。つまり、逐次近似による解の形は、$\phi(x)$ を展開して、それの ϕ_0 から ϕ_1 を求め、ϕ_1 から ϕ_2 を求め、というのを繰り返す作業によって構成されています。なので、逐次近似です。ちなみにフレドホルム型での逐次近似はノイマン級数になっています。

最後に力学の例を使って線形の微分方程式からボルテラ型の積分方程式に変える方法を見ておきます。弦の振動における波動方程式は (力学の「弦の振動」参照)

$$
\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}
$$

と与えられています。これを積分方程式に持っていきます。y が $y(x,t) = u(x)v(t)$ と分離できるとします。そうすると

$$
\begin{aligned}
u(x)\frac{\partial^2 v(t)}{\partial t^2} &= \alpha^2 v(t)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \\
\frac{1}{v(t)}\frac{\partial^2 v(t)}{\partial t^2} &= \frac{\alpha^2}{u(x)}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

変数分離の形 (左辺は t のみ、右辺は x のみ) になっているので、

$$
\frac{\alpha^2}{u(x)}\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = C\ ,\ \frac{1}{v(t)}\frac{d^2 v(t)}{dt^2} = C
$$

と書けます (C は定数)。$u(x)$ の方を使うことにして

$$
\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \tag{10}
$$

とします。第一項を 0 から x の範囲で積分して

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= \phi(x) \\
\frac{du}{dx} &= \int_0^x dy\phi(y) + d_1
\end{aligned}
$$

d_1 は積分定数です。これをさらに積分して

$$
\begin{aligned}
u(x) =& \int_0^x dx \frac{du(x)}{dx} \\
=& \int_0^x dy_2 \frac{du(y_2)}{dy_2} \\
=& \int_0^x dy_2 \int_0^{y_2} dy_1 \phi(y_1) + d_1 \int_0^x dy_2 + d_2 \\
=& \int_0^x dy_1 \phi(y_1) \int_{y_1}^x dy_2 + d_1 \int_0^x dy_2 + d_2 \\
=& \int_0^x dy \phi(y)(x-y) + d_1 x + d_2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2 行目で積分順序の交換を使っています。積分定数 d_1, d_2 を決めるために、境界条件を

$$
u(x=0)=0\ ,\ u(x=l)=0
$$

と与えれば

$$
u(0) = d_2 = 0
$$

$$
u(x=l) = \int_0^l dy \phi(y)(l-y) + d_1 l = 0 \ \Rightarrow\ d_1 = -\frac{1}{l}\int_0^l dy \phi(y)(l-y)
$$

これらを (11) に入れて

$$
u(x) = \int_0^x dy (x-y)\phi(y) - \frac{x}{l}\int_0^l dy \phi(y)(l-y)
$$

これを (10) に入れることで

$$
\phi(x) + \lambda \int_0^x dy (x-y)\phi(y) - \lambda \frac{x}{l}\int_0^l dy \phi(y)(l-y) = 0
$$

第三項の積分は定数でしかないので d_1 に戻せば

$$
\begin{aligned}
\phi(x) + \lambda \int_0^x dy (x-y)\phi(y) + \lambda d_1 x = 0 \\
\phi(x) + \lambda \int_0^x dy (x-y)\phi(y) =& -\lambda d_1 x
\end{aligned}
\tag{12}
$$

このように第 2 種ボルテラ型になります。これは積分核が $\lambda(x-y)$ であることから逐次近似法を使えば解くことが出来ます。このときの $G(x,y)$ は三角関数の級数展開になっているので、三角関数を使うことで厳密に解けます。$\phi(x)$ が求まったら積分して $u(x)$ に持っていけば良いです。

これで見たかった部分は $f(x)$ の x 微分を積分することで積分方程式に持っていくという流れです。これを一般化しておきます。線形の n 階微分方程式

$$
\alpha_n(x) f^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + \cdots \alpha_0(x) f(x) = g(x) \tag{13}
$$

を考えます。微分を積分していくのは、$f(x)$ の n 回の微分を $f^{(n)}(x)=F(x)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) =& \ F(x) \\
f^{(n-1)}(x) =& \int_a^x dy_1\ F(y_1)+c_1 \\
f^{(n-2)}(x) =& \int_a^x dy_2\ f^{(n-1)}(y_2) \\
=& \int_a^x dy_2\int_a^{y_2} dy_1\ F(y_1)+c_1\int_a^x dy+c_2 \\
=& \int_a^x dy_1\int_{y_1}^{x} dy_2\ F(y_1)+c_1(x-a)+c_2 \\
=& \int_a^x dy_1(x-y_1)F(y_1)+c_1(x-a)+c_2 \\
f^{(n-3)}(x) =& \int_a^x dy_2\ f^{(n-2)}(y_2) \\
=& \int_a^x dy_2\int_a^{y_2} dy_1(y_2-y_1)F(y_1)+c_1\int_a^x dy_2(y_2-a)+c_2\int_a^x dy_2+c_3 \\
=& \int_a^x dy_1\int_{y_1}^{x} dy_2(y_2-y_1)F(y_1)+\frac{1}{2}c_1(x-a)^2+c_2(x-a)+c_3 \\
=& \ \frac{1}{2}\int_a^x dy_1(x-y_1)^2F(y_1)+\frac{1}{2}c_1(x-a)^2+c_2(x-a)+c_3
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
f^{(n-m)}(x)=&\frac{1}{(m-1)!}\int_a^x dy(x-y)^{m-1}F(y) \\
&+\frac{1}{(m-1)!}c_1(x-a)^{n-1}+\frac{1}{(m-2)!}c_2(x-a)^{n-2}+\cdots+c_{m-1}(x-a)+c_m
\end{aligned}
$$

m は $m=1$ から $m=n$ までで、$m=n$ で $f(x)$ です。積分定数 c_m は初期条件や境界条件によって決定されます。これを元の微分方程式に入れます。(13) の第一項はそのまま

$$
\alpha_n(x)f^{(n)}(x)=\alpha_n(x)F(x)
$$

第二項以降は

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n-m}f^{(n-m)}=&\ \alpha_{n-m}\int_a^x dy\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}F(y) \\
&+\alpha_{n-m}\Big(\frac{1}{(m-1)!}c_1(x-a)^{n-1}+\frac{1}{(m-2)!}c_2(x-a)^{n-2}+\cdots+c_{m-1}(x-a)+c_m\Big)
\end{aligned}
$$

これの $m=1$ から $m=n$ までの和です。これの積分を含んでいる第一項の和は

$$\int_a^x dy\ K(x,y)F(y) = -\int_a^x dy \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m}\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}F(y)$$

とします。残りと微分方程式の $g(x)$ を合わせて

$$\begin{aligned}
A(x) = g(x) &- \alpha_{n-1}c_1 - \alpha_{n-2}(c_1(x-a)+c_2) - \cdots \\
&- \alpha_{n-m}\big(\frac{1}{(m-1)!}c_1(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(m-2)!}c_2(x-a)^{n-2} + \cdots + c_{m-1}(x-a) + c_m\big) - \cdots \\
&- \alpha_0\big(\frac{1}{(n-1)!}c_1(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}c_2(x-a)^{n-2} + \cdots + c_{n-1}(x-a) + c_n\big)
\end{aligned}$$

そうすると微分方程式 (13) は

$$\alpha_n(x)F(x) - \int_a^x dy\ K(x,y)F(y) = A(x)$$

となり、$\alpha_n(x)$ で割れば第 2 種ボルテラ型になります ($\alpha_n(x) \neq 0$)。後は $F(x)$ を求めて $f^n(x) = F(x)$ を積分していき $f(x)$ を求めればいいです。特徴的なのは、この積分方程式には初期条件もしくは境界条件が含まれている点です。これは微分方程式にはない特徴です。物理での微分方程式を解くというのは、一般解を求めて、そこに初期条件もしくは境界条件によって欲しい解の形に持っていくということです。このため、微分方程式と条件は分離しています (例えば弦の波動方程式は弦の端とは無関係に同じ形)。これに対して積分方程式は条件も含んでいます。これは力学の場合で言えば、運動方程式の意味と条件を積分方程式は含んでいるということです。

この微分方程式を積分方程式に持っていく話から分かるように、積分方程式に持っていくと明らかに複雑になります。そんな中で積分方程式を使う理由はいくつかあります。1 つは今触れたように、積分方程式は運動法則と条件が含まれているという点です。他の分かりやすい理由は線形の n 階微分方程式を解く方法として使用できるという点です。線形の n 階微分方程式を積分方程式に持っていかずに解くには式変形とかを駆使する必要がありますが、第 2 種ボルテラ型の積分方程式は機械的に解く方法が存在しています。もう 1 つ特徴的なのは、微分方程式は現象のミクロな部分を記述するのに対して、積分方程式は現象の全体的な記述をしている点です。これは例えば、弦での積分方程式 (12) が境界条件を含めた弦全体 (この場合は位置依存部分) を表現していることから分かります