リーマン積分とダルブー積分

簡単にリーマン積分に触れてからダルブー積分を見ていきます。数学の話なので具体的な話には触れていません。上限、下限は知っているとしています。

[A1] 関数 f があり、$\epsilon > 0$ に対して、点付き分割 $\dot{P}, \dot{Q}$ において $\Delta_P < \delta,\ \Delta_Q < \delta$ となる δ が存在し、$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \epsilon$ となるなら、f はリーマン積分可能。

[A2] リーマン積分での挟みうち

[A3] リーマン積分可能な関数は有界。

[A4] 閉区間 I でリーマン積分可能な関数 f があり、I の有限個の点を除いて $f(x) = g(x)$ となる関数 g があるとき、f と g のリーマン積分は等しい。

[B1] 閉区間 I で有界な関数 f があり、I の分割 P とその細分 S があるとき、上限和、下限和は $L(f;P) \leq L(f;S),\ U(f;S) \geq U(f;P)$。

[B2] f を閉区間 I で有界な関数とし、I の異なる分割 P_1, P_2 に対して $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$。

[B3] 閉区間で有界な関数 f があるとき、上積分と下積分は存在し、$L(f) \leq U(f)$。

[B4] f を閉区間 I で有界な関数としたとき、I の分割 P において $\epsilon > 0$ に対して $U(f;P) < U(f) + \epsilon,\ L(f;P) > U(f) - \epsilon$ $(\Delta < \delta)$ となる δ が存在する。

[B5] 閉区間 I で有界な関数 f があり、$\epsilon > 0$ に対して $U(f;P_\epsilon) - L(f;P_\epsilon) < \epsilon$ となる分割 P_ϵ があるなら、f はダルブー積分可能。

[B6] 関数 f が閉区間において定数ならダルブー積分可能。

[B7] 閉区間において単調な関数はダルブー積分可能。

[B8] 閉区間において連続な関数はダルブー積分可能。

[B9] 閉区間 I で関数 f がリーマン積分可能なら f はダルブー積分可能であり、リーマン積分とダルブー積分は等しい。

- リーマン積分

  閉区間 $I = [a, b]$ を分割します。これは、$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ として、I を n 個の区間に分けて

$$I_1 = [x_0, x_1]\ ,\ I_2 = [x_1, x_2]\ ,\ \ldots\ ,\ I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

と作ります。このときの $n+1$ 個の点による集合 $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を $[a, b]$ の分割 (partition)P と定義し、その点は P の分割点、分割 P による $I_1, I_2, \ldots$ は P での部分区間 (subinterval) と呼ばれます。P において、最も差 $x_i - x_{i-1}$ (部分区間の長さ) が大きいものを

$$\Delta = \max\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1}\} = \max_{1 \leq k \leq n}\{x_k - x_{k-1}\}$$

と定義します。これを $||P||$ と表記していることが多いですが (ノルムの表記)、見づらくなりそうなので Δ にしています。

閉区間 $I_1 = [x_0, x_1]$ において $x_0 \leq t_1 \leq x_1$ となる t_1 を選んだとします。他の $I_2, \ldots, I_n$ でも同様に t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を選んだ時の分割 P は点付き分割 (tagged partition) と呼ばれ

$$\dot{P} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

と定義されます。

関数 f が $[a, b]$ で定義されており、$[a, b]$ での点付き分割 $\dot{P}$ が与えられているとして

$$S(f; \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} \leq t_i \leq x_i)$$

これを f のリーマン和 (Riemann sum) と言い、縦を $f(t_i)$、横を $x_i - x_{i-1}$ とした長方形を加えていったものです。そして、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\Delta < \delta$ (細かいことを言えば $\dot{P}$ での Δ) となる δ があり、$|S(f; \dot{P}) - \gamma| < \epsilon$ となる γ が存在するなら、f は $[a, b]$ でリーマン積分可能 (Riemann integrable) と定義されます。γ は $[a, b]$ での f のリーマン積分 (Riemann integral) と呼ばれ

$$\gamma = \int_a^b f(x)dx$$

と表記されます。

関数の定数倍と関数の和に対するリーマン和は、α を定数、f, g を関数として

$$S(\alpha f; \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f)(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha S(f; \dot{P})$$

$$S(f + g; \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} (f + g)(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + g(t_i))(x_i - x_{i-1}) = S(f; \dot{P}) + S(g; \dot{P})$$

$f(x) \geq g(x)$ なら

$$S(f; \dot{P}) - S(g; \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - g(t_i))(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

なので

$$S(f; \dot{P}) \geq S(g; \dot{P}) \tag{1}$$

となります。

リーマン積分が一意的に決まることは簡単に分かります。関数の極限の一意性と同じようにするだけです (リーマン積分可能を極限と言っていないのは、$\Delta \to 0$ が $S(f; \dot{P})$ の極限の意味になっていないため)。P_1, γ_1 と P_2, γ_2 になっているとして、$\epsilon > 0$ に対してそれぞれ δ_1, δ_2 があり

$$|S-\gamma_1|<\epsilon \quad (\Delta_1<\delta_1)$$

$$|S-\gamma_2|<\epsilon \quad (\Delta_2<\delta_2)$$

$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ とし、$\Delta<\delta$ ($\Delta<\delta_1,\delta_2$) となる分割 P において 2 つとも成立します。そして、三角不等式から

$$|\gamma_1-\gamma_2|=|\gamma_1-S+S-\gamma_2|\leq|\gamma_1-S|+|S-\gamma_2|<2\epsilon \quad (\Delta<\delta)$$

よって、$\gamma_1=\gamma_2$ です。

リーマン積分の最も単純な例は関数が定数の場合です。$f(x)=\alpha$ とすれば、リーマン和は

$$\begin{aligned}
S(f;\dot{P})=\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i-x_{i-1})&=\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\\
&=\alpha((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_{n-1}-x_{n-2})+(x_n-x_{n-1}))\\
&=\alpha(x_n-x_0)\\
&=\alpha(b-a)
\end{aligned}$$

リーマン積分の定義に入れれば、δ は適当に選んで

$$|S(f;\dot{P})-\alpha(b-a)|=0 \quad (\Delta<\delta)$$

よって、任意の $\epsilon>0$ で成立するので、リーマン積分は $\alpha(b-a)$ です。

基本的なリーマン積分の定理を示します。

[A1] 関数 f があり、任意の $\epsilon>0$ に対して、点付き分割 $\dot{P},\dot{Q}$ において $\Delta_P<\delta,\ \Delta_Q<\delta$ となる δ が存在し

$$|S(f;\dot{P})-S(f;\dot{Q})|<\epsilon \tag{2}$$

となるなら、f はリーマン積分可能。これは必要十分条件。

リーマン積分可能なら (2) から示します。関数 f がリーマン積分可能なので、δ が存在し、リーマン積分は一意的に決まるので

$$|S(f;\dot{P})-\gamma|<\frac{1}{2}\epsilon\ ,\ |S(f;\dot{Q})-\gamma|<\frac{1}{2}\epsilon \quad (\Delta_P,\Delta_Q<\delta)$$

これと三角不等式によって

$$|S(f;\dot{P})-S(f;\dot{Q})|=|S(f;\dot{P})-\gamma+\gamma-S(f;\dot{Q})|\leq|S(f;\dot{P})-\gamma|+|\gamma-S(f;\dot{Q})|<\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon$$

となり、リーマン積分可能なら (2) になります。

今度は (2) なら f はリーマン積分可能を示します。任意の ϵ で (2) は成立しているので、n を正の整数として

$$|S(f;\dot{P})-S(f;\dot{Q})|<\frac{1}{n}\quad(\Delta_P,\Delta_Q<\delta_n)$$

δ_n は $\Delta_P,\Delta_Q<\delta_n$ であればいいので、$n+1$ のときは $\Delta_P,\Delta_Q<\delta_{n+1}\leq\delta_n$ となるように $\delta_1,\delta_2,\ldots$ を作ったとします。分割 P を n に対応させて P_n として

$$|S(f;\dot{P}_n)-S(f;\dot{Q})|<\frac{1}{n}\quad(\Delta_n,\Delta_Q<\delta_n)$$

Δ_n は P_n での最大の部分区間の長さです。$m>n$ では $\delta_m\leq\delta_n$ となり、分割 P_m では $\Delta_m<\delta_m\leq\delta_n$ となるので、Q を P_m として

$$|S(f;\dot{P}_n)-S(f;\dot{P}_m)|<\frac{1}{n}\quad(\Delta_n,\Delta_m<\delta_n\ ,\ m>n)$$

これを数列 $\{x_i\}$ が、N を正の整数として

$$|x_n-x_m|<\epsilon\quad(m,n>N)$$

であるときコーシー列として定義されることと比べると、$\{S(f;\dot{P}_n)\}$ (n に対して $n>N$ となる N は適当に与えられる) はコーシー列になっているのが分かります。コーシー列は収束するので、$\{S(f;\dot{P}_n)\}$ はどこかに収束します。それを α とすれば、数列の収束の定義から

$$|S(f;\dot{P}_n)-\alpha|<\frac{1}{n}$$

そうすると、任意の分割 P に対して

$$|S(f;\dot{P})-\alpha|=|S(f;\dot{P})-S(f;\dot{P}_n)+S(f;\dot{P}_n)-\alpha|\leq|S(f;\dot{P})-S(f;\dot{P}_n|)+|S(f;\dot{P}_n)-\alpha|\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<2\epsilon$$

よって、f はリーマン積分可能となります。

[A2] 閉区間 $[a,b]$ において関数 f とリーマン積分可能な関数 g,h があり、任意の $\epsilon>0$ に対して

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x)\ ,\ \int_a^b(h(x)-g(x))dx<\epsilon \tag{3}$$

となっているなら、f はリーマン積分可能。

g,h はリーマン積分可能なので

$$|S(g;\dot{P})-\gamma_g|<\epsilon\ ,\ |S(h;\dot{P})-\gamma_h|<\epsilon\quad(\Delta<\delta)$$

これらは絶対値を外せば

$$-\epsilon < S(g;\dot{P}) - \gamma_g < \epsilon\ ,\ -\epsilon < S(h;\dot{P}) - \gamma_h < \epsilon$$

なので

$$\gamma_g - \epsilon < S(g;\dot{P})\ ,\ S(h;\dot{P}) < \epsilon + \gamma_h$$

リーマン和の性質 (1) から $S(g;\dot{P}) \leq S(f;\dot{P}) \leq S(h;\dot{P})$ なので

$$\gamma_g - \epsilon < S(g;\dot{P}) \leq S(f;\dot{P}) \leq S(h;\dot{P}) < \gamma_h + \epsilon$$

となり

$$\gamma_g - \epsilon < S(f;\dot{P}) < \gamma_h + \epsilon$$

別の分割 Q でも同様に

$$\gamma_g - \epsilon < S(f;\dot{Q}) < \gamma_h + \epsilon$$

そうすると、$S(f;\dot{P})$ から $\gamma_g - \epsilon < S(f;\dot{Q})$ を引くと

$$S(f;\dot{P}) < \gamma_h + \epsilon$$
$$S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q}) < \gamma_h + \epsilon - (\gamma_g - \epsilon)$$
$$S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q}) < \gamma_h - \gamma_g + 2\epsilon$$

2 行目は左辺では大きい方を引き、右辺では小さい方を引いているので、不等号は変更されません。もう 1 つの不等号では

$$\gamma_g - \epsilon < S(f;\dot{P})$$
$$\gamma_g - \epsilon - (\gamma_h + \epsilon) < S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})$$
$$-(\gamma_h - \gamma_g + 2\epsilon) < S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})$$

なので

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \gamma_h - \gamma_g + 2\epsilon = \int_a^b (h(x) - g(x))dx + 2\epsilon < 3\epsilon = \epsilon'$$

よって、[A1] から f はリーマン積分可能となります。

[A3] リーマン積分可能な関数は有界。

閉区間 $[a,b]$ でリーマン積分可能で有界ではないとします。三角不等式から

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y|$$

となっているので

$$|x+y| \geq |x| - |y|$$

これを使うとリーマン和は

$$|S(f;\dot{P})| \geq |f(t_1)(x_1-x_0)| - |f(t_2)(x_2-x_1)| - \cdots - |f(t_n)(x_n-x_n)|$$

f は有界でないとしているので、$[a,b]$ における少なくとも 1 つの部分区間で $f(x)$ の上限がないです。その部分区間を $[x_k, x_{k-1}]$ として和から分離して書くと

$$|S(f;\dot{P})| \geq |f(t_k)(x_k-x_{k-1})| - |\sum_{i\neq k}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})|$$

右辺第 1 項は f が有界になっていない部分 (上限がない部分) なので、適当な値より大きくなります。それを実数 α を使って

$$|f(t_k)(x_k-x_{k-1})| > \alpha + |\sum_{i\neq k}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})|$$

とすれば

$$|S(f;\dot{P})| > \alpha \tag{4}$$

となります。

一方で、リーマン積分可能としているので $S(f;\dot{P})$ は

$$|S(f)-\gamma| < \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

逆三角不等式から

$$|S(f)| - |\gamma| \leq |S(f)-\gamma|$$

とすれば

$$|S(f)| < |\gamma| + \epsilon$$

(4) での α は任意なので $\alpha = |\gamma| + \epsilon$ と選ぶと、これと矛盾します。よって、f が非有界ではリーマン積分可能とならないので、f は有界です。

[A4] 閉区間 I でリーマン積分可能な関数 f があり、I の有限個の点を除いて $f(x) = g(x)$ となる関数 g があるとき、f と g のリーマン積分は等しい。

分割を P とし、f のリーマン積分が γ のとき、g のリーマン和 $S(g;\dot{P})$ が、$x = c$ を除いて $f(x) = g(x)$ なら

$$|S(g;\dot{P}) - \gamma| < \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

となることが示せればいいです。

f のリーマン和を差し込むと、三角不等式から

$$|S(g;\dot{P}) - S(f;\dot{P}) + S(f;\dot{P}) - \gamma| \leq |S(g;\dot{P}) - S(f;\dot{P})| + |S(f;\dot{P}) - \gamma|$$

右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned}|S(g;\dot{P}) - S(f;\dot{P})| &= \Big|\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big| \\ &= \big|g(t_1)(x_1 - x_0) + \cdots + g(t_k)(x_k - x_{k-1}) + \cdots + g(t_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &\qquad - \big(f(t_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(t_k)(x_k - x_{k-1}) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})\big)\big| \end{aligned} \tag{5}$$

このとき、c は $[x_{k-1}, x_k]$ にいて $t_k = c$ と選んだとすれば、その点を除いて $f(x) = g(x)$ なので

$$|S(g;\dot{P}) - S(f;\dot{P})| = |g(c) - f(c)|(x_k - x_{k-1})$$

Δ は部分区間の長さが最大のものなので

$$|g(c) - f(c)|(x_k - x_{k-1}) \leq |g(c) - f(c)|\Delta$$

三角不等式 $|g(c) - f(c)| \leq |g(c)| + |f(c)|$ を使えば

$$|S(g;\dot{P}) - S(f;\dot{P})| \leq (|g(c)| + |f(c)|)\Delta \tag{6}$$

また、c が部分区間の端点にいると 2 回 c が現れるのでこれの 2 倍になりますが、どちらでも話は同じです。

$\epsilon > 0$ に対して δ_1 が

$$\Delta < \delta_1 = \frac{\epsilon}{|g(c)| + |f(c)|}$$

となっているとすれば

$$|S(f;\dot{P})-S(g;\dot{P})|\leq(|g(c)|+|f(c)|)\Delta<\epsilon \quad (\Delta<\delta_1) \tag{7a}$$

とできます。一方で、これとは無関係に f はリーマン積分可能なので、任意の $\epsilon>0$ に対して

$$|S(f;\dot{P})-\gamma|<\epsilon \quad (\Delta<\delta_2) \tag{7b}$$

となる δ_2 がいます (同じ分割なので同じ Δ)。

$\delta_1=\delta_2$ ならそのまま (7a) と (7b) は成立します。δ_1 が δ_2 より小さければ、(7b) では δ_1 で成立し、(7a) も δ_1 で成立します。δ_2 が δ_1 より小さければ、(7b) では δ_2 で成立し、(7a) も δ_2 で成立します。

これらから、f がリーマン積分可能であることを $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ で成立させれば、(7a) も同じ δ で成立します。よって

$$|S(g;\dot{P})-\gamma|\leq|S(g;\dot{P})-S(f;\dot{P})|+|S(f;\dot{P})-\gamma|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon \quad (\Delta<\delta)$$

となるので、1 点を除いて $f(x)=g(x)$ のとき g のリーマン積分は γ になります。

2 点 c_1,c_2 を除いて $f(x)=g(x)$ のときは、1 点 c_1 ではリーマン積分が等しいことが分かっているので、(5) で c_2 の項だけを分離させれば ($S(g;\dot{P}),(f;\dot{P})$ において、c_1 だけを含む $S_1(g;\dot{P}),S_1(f;\dot{P})$ では成立しているとする)、c_2 で (6) のようになります。後は同じ話になり、点の数をさらに増やしても同じことの繰り返しになります (ちゃんと示すなら帰納法を使えばいい)。もしくは、最初から l 個の点があるとして、(5) で $c_1,c_2,\dots,c_l$ による和の形にしても同様です。

ここからダルブー積分を見ていきます。リーマン積分には点付き分割の任意性による煩わしさがありますが、それを省くようにします。

- 上限和、下限和

  閉区間 $[a,b]$ において有界な関数 f があるとします。閉区間を分割して $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ ($x_0=a,\ x_n=b$) とします。リーマン和は縦 $f(t_i)$ と横 x_i-x_{i-1} の長方形の足し算ですが、t_i ($x_i\leq t_i\leq x_{i-1}$) の位置は任意です。その任意性をなくすために、$[x_i,x_{i-1}]$ において $f(t_i)$ が最も小さくなる $x\in[x_i,x_{i-1}]$ を選んだとします。これを下限 inf によって

$$m_i=\inf\{f(x)|\ x\in[x_i,x_{i-1}]\}$$

  と定義します。同様に、$f(t_i)$ が最も大きくなる場合を上限 sup によって

$$M_i=\sup\{f(x)|\ x\in[x_i,x_{i-1}]\}$$

  と定義します。そうすると、m_i だけで和を取ったものと、M_i だけで和を取ったものが与えられ

$$L(f;P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})\ ,\ U(f;P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

  L を下限和 (lower sum)、U を上限和 (upper sum) と言います。定義から $m_i\leq M_i$ なので、$L(f;P)\leq U(f;P)$ です。

L, U に P の依存性を書いているように、分割の仕方は固定させていません。なので、分割の仕方によって $L(f;P), U(f;P)$ の値は変わります。

- 細分
  分割 P をさらに細かく分割したものを P の細分 (refinement) と言い、S を細分とすれば $P \subset S$ です。簡単に言えば、P での分割された各閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の間にさらに分割する点を加えたのが S です。なので、集合の記号で書けば、P の各部分区間において

$$[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \cdots \cup [y_{l-1}, y_l]$$

としたときの $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ が P の細分 S です。

- 上積分、下積分
  分割 P を $L(f;P)$ の上限となるように選びます。つまり

$$L(f) = \sup\{L(f;P|\ P \in A(I))\}$$

とし、これを f の下積分 (かせきぶん、lower integral) と言います。$A(I)$ は閉区間 I で可能な分割の集合です ($A(I)$ の中から上限となる P を選んだ場合が $L(f)$)。同様に $U(f;P)$ では下限になる場合を選ぶことにして

$$U(f) = \inf\{U(f;P)|\ P \in A(I)\}$$

これを上積分 (じょうせきぶん、upper integral) と言います。上積分は上限和の下限、下積分は下限和の上限となっていることに注意してください。また、上積分、下積分が存在することは [B3] で示しています。

積分記号を使ったときの上積分、下積分は

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\ ,\ \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

と表記されます。

$L(f), U(f)$ には定義からすぐに分かる制限があります。$L(f;P)$ は

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\ ,\ m_i = \inf\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

となっているために、$f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ において下限となる場合 $m_0 = \inf\{f(x)|\ x \in I\}$ での $m_0(b-a)$ より小さくなることはないので

$$m_0(b-a) \leq L(f;P)$$

同様に、$U(f;P)$ は

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \ , \ M_i = \sup\{f(x)|\ x \in [x_i, x_{i-1}]\}$$

となっているために、$f(x)$ が I において上限となる場合 $M_0 = \sup\{f(x)|\ x \in I\}$ での $M_0(b-a)$ を超えられないので

$$U(f;P) \le M_0(b-a)$$

$L(f;P) \le U(f;P)$ と合わせれば

$$m_0(b-a) \le L(f;P) \le U(f;P) \le M_0(b-a)$$

そして、$L(f)$,$U(f)$ の定義から $L(f;P) \le L(f),\ U(f) \le U(f;P)$ なので

$$m_0(b-a) \le L(f) \ , \ U(f) \le M_0(b-a)$$

となっています。

- ダルブー積分
  上積分 $U(f)$ と下積分 $L(f)$ が $L(f) = U(f)$ となるとき、閉区間 I においてダルブー積分可能 (Darboux integrable) と言い、$L(f) = U(f) = \gamma$ をダルブー積分 (Darboux integral) と言います。部分区間の上限、下限から作っているのでリーマン積分での点付き分割の煩わしさがなくなっています。そして、リーマン積分とダルブー積分は同じです。同じなので、積分と言ったときの表記に上積分、下積分が使われることはほぼなく、リーマン積分の表記だけが使われています。
  上限和、下限和とリーマン和を一緒に考えると積分の定義を簡単に言えるようになります。定義からリーマン和は上限和と下限和の間にいるので

$$L(f;P) \le S(f;\dot{P}) \le U(f;P)$$

このため、分割 P での Δ が小さくなったとき、$S(f;\dot{P})$ が $L(f) = U(f)$ と等しくなるなら積分可能というのは感覚的に分かりやすいです。極限の言い回しをすれば、分割 $P_1, P_2, \ldots$ による数列 $\{P_n\}$ があり、これの $n \to \infty$ において $\Delta \to 0$ になるとき、リーマン積分 γ と上限和 $U(f;P_n)$、下限和 $L(f;P_n)$ が

$$\gamma = L(f) = U(f) \tag{8}$$

となるなら、積分可能となります。この言い方をするために、積分の説明にはほとんどの場合でダルブー積分が使われていて、リーマン積分はダルブー積分の文脈で定義していることが多いです。ただし、数学の人以外にはあまりなじみのない上限、下限を使うことにはなります。
　また、積分が存在しているとき、任意の分割 P に対して

$$L(f;P) \le \gamma \le U(f;P) \tag{9}$$

となる必要があります。これは上積分、下積分は上限和、下限和の分割による集合の下限、上限であるために、(8) なら (9) になる必要があるためです。

上限和、下限和と上積分、下積分に関する定理を示します。最後にリーマン積分とダルブー積分が等しいことを示します。

[B1] 閉区間 I で有界な関数 f があり、I の分割 P とその細分 S があるとき、上限和、下限和は

$$L(f;P) \leq L(f;S),\ U(f;S) \geq U(f;P).$$

P に点を 1 つ加えた細分を $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_i, \ldots, x_n\}$ と作ります。そうすると、P での

$$m_i = \inf\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

において

$$m'_i = \inf\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, z]\}\ ,\ m''_i = \inf\{f(x)|\ x \in [z, x_i]\}$$

としたのが新しく作られます。m'_i と m''_i は $[x_{i-1}, x_i]$ を z で 2 分割したそれぞれの範囲内での下限なので、元々の $[x_{i-1}, x_i]$ での下限である m_i より小さくなることはないです ($m'_i, m''_i \geq m_i$)。このため

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i((x_i - z) + (z - x_{i-1})) = m_i(x_i - z) + m_i(z - x_{i-1}) \leq m''_i(x_i - z) + m'_i(z - x_{i-1})$$

これを足したものが下限和なので、P の閉区間に分割する点を 1 つ加えた細分 S では $L(f;P)$ に等しいままか増加します。

また、差を見ると

$$\begin{aligned} L(f;P) - L(f;S) &= m_i(x_i - x_{i-1}) - (m''_i(x_i - z) + m'_i(z - x_{i-1})) \\ &= m_i(x_i - z + z - x_{i-1}) - m''_i(x_i - z) - m'_i(z - x_{i-1}) \\ &= (m_i - m''_i)(x_i - z) - (m_i - m'_i)(x_{i-1} - z) \end{aligned}$$

$f(x)$ は有界なので $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$ $(\alpha > 0)$ となる α が存在します。そして

$$0 \geq m_i - m''_i \geq -2\alpha\ ,\ 0 \geq m_i - m'_i \geq -2\alpha$$

なので

$$L(f;P) - L(f;S) \geq -2\alpha(x_i - z) + 2\alpha(x_{i-1} - z) = -2\alpha(x_i - x_{i-1})$$

P の区間の長さの最大は Δ_P なので

$$-L(f;P)+L(f;S) \leq 2\alpha(x_i - x_{i-1}) \leq -2\alpha\Delta_P$$

となります。

例えば、m_i' での $[x_{i-1}, z]$ に分割する点をさらに加えても同じことを繰り返すだけなので、P とその細分 S での下限和は

$$L(f;P) \leq L(f;S)$$

となっています。差においても分割に点を加えれば同じ構造の項が 1 つ増えるだけなので、n 個の点で分割したなら

$$-L(f;P)+L(f;S) \leq -2\alpha n\Delta_P \tag{10}$$

となります。

上限和では

$$M_i' = \sup\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, z]\}\ ,\ M_i'' = \sup\{f(x)|\ x \in [z, x_i]\}$$

としたとき、元々の M_i は $[x_{i-1}, x_i]$ での上限なので $M_i', M_i'' \leq M_i$ となることから

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i((x_i - z) + (z - x_{i-1})) = M_i(x_i - z) + M_i(z - x_{i-1}) \geq M_i''(x_i - z) + M_i'(z - x_{i-1})$$

よって、P の閉区間に分割する点を 1 つ加えた細分 S では $U(f;P)$ に等しいままか減少します。差を見ると

$$\begin{aligned}
U(f;P) - U(f;S) &= M_i(x_i - x_{i-1}) - M_i''(x_i - z) - M_i'(z - x_{i-1}) \\
&= M_i(x_i - z + z - x_{i-1}) - M_i''(x_i - z) - M_i'(z - x_{i-1}) \\
&= (M_i - M_i'')(x_i - z) + (M_i - M_i')(z - x_{i-1}) \\
&\leq 2\alpha(x_i - z) + 2\alpha(z - x_{i-1}) \quad (M_i', M_i'' \leq M_i) \\
&= 2\alpha(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq 2\alpha\Delta_P
\end{aligned}$$

点の数が増えても同様なので

$$U(f;P) \geq U(f;Q)\ ,\ U(f;P) - U(f;Q) \leq 2\alpha n\Delta_P \tag{11}$$

となります。

[B2] f を閉区間 I で有界な関数とし、I の異なる分割 P_1, P_2 に対して $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$。

上限和、下限和の定義からの $L(f;P) \leq U(f;P)$ と、P_1, P_2 を合わせた細分 S(P_1 になく P_2 にある点が加わった分割) による [B1] から

$$L(f, P_1) \leq L(f;S) \leq U(f;S) \leq U(f, P_2)$$

となります。

[B3] 閉区間 I で有界な関数 f があるとき、上積分と下積分は存在し、$L(f) \leq U(f)$ となる。

任意の分割 P_1, P_2 に対して、[B2] から $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ です。どの分割でもこの関係は満たされるので、$U(f, P_2)$ は集合 $\{L(f,P)|\ P \in A(I)\}$ ($A(I)$ は I で可能な分割の集合) の上界です。よって、集合 $\{L(f,P)|\ P \in A(I)\}$ の上界があるので上限としての $L(f)$ は存在し、上限の定義から $L(f)$ は上界 $U(f, P_2)$ を超えることはできないので $L(f) \leq U(f, P_2)$ です。

同じように見ると、$L(f)$ は $P \in A(I)$ による $U(f,P)$ の集合の下界です。よって、集合 $\{U(f;P)|\ P \in A(I)\}$ の下界があるので下限としての $U(f)$ は存在し、$U(f)$ は下界 $L(f)$ より小さくなれないので、$U(f) \geq L(f)$ となります。

[B4] f を閉区間 I で有界な関数としたとき、I の分割 P において任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$U(f;P) < U(f) + \epsilon\ ,\ L(f;P) > L(f) - \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

となる δ が存在する。

$f(x)$ は有界なので、閉区間において $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$ ($\alpha > 0$) となる α がいます。上限和 $U(f;P)$ は分割 P での f の上限の和から作られ、$U(f)$ は各分割による上限和 $U(f;P_1), U(f;P_2), \ldots$ による集合の下限です。なので、下限である $U(f)$ に任意の $\epsilon > 0$ を加えたものより小さくなる分割 P' による上限和は存在し

$$U(f;P') < U(f) + \epsilon \tag{12}$$

任意の分割 P とその細分 S とは (11) から

$$U(f;P) \geq U(f;S)\ ,\ U(f;P) - U(f;S) \leq 2\alpha n \Delta_P$$

n は細分で加えられた点の数です。これから、細分 S を任意の分割 P と P' を重ねたものとすれば

$$U(f;P) \leq U(f;S) + 2\alpha n \Delta_P \leq U(f;P') + 2\alpha n \Delta_P < U(f) + \epsilon + 2\alpha n \Delta_P$$

よって、$\Delta_P = \epsilon/2\alpha n$ とすれば

$$U(f;P) < U(f) + 2\epsilon$$

となります。

下限和 $L(f;P)$ は分割 P での f の下限の和から作られ、$L(f)$ は各分割による下限和 $L(f;P_1), L(f;P_2), \ldots$ による集合の上限です。なので、上限である $L(f)$ に任意の $\epsilon > 0$ を引いたものものより大きくなる分割 P' による下限和は存在し

$$L(f;P') > L(f) - \epsilon$$

そして、任意の分割 P とその細分 S とは (10) から

$$L(f;P) \leq L(f;S)\ ,\ -L(f;P) + L(f;S) \leq -2\alpha n \Delta_P$$

なので

$$L(f;P) \geq L(f;S) + 2\alpha n \Delta_P \geq L(f;P') + 2\alpha n \Delta_P > L(f) - \epsilon + 2\alpha n \Delta_P = L(f) - 2\epsilon$$

となります。

[B5] 閉区間 I で有界な関数 f があり、$\epsilon > 0$ に対して

$$U(f;P_\epsilon) - L(f;P_\epsilon) < \epsilon \tag{13}$$

となる分割 P_ϵ があるなら、f はダルブー積分可能。これは必要十分条件。

(13) のときダルブー積分可能となることを示します。$L(f) \geq L(f;P),\ U(f) \leq U(f;P)$ から $L(f;P)$ を引くと

$$U(f) - L(f;p) \leq U(f;P) - L(f;p)$$

$L(f;p) \leq L(f)$ なので

$$U(f) - L(f) \leq U(f;P) - L(f;p)$$

(13) を満たす分割 P_ϵ を選べば

$$U(f) - L(f) \leq U(f;P_\epsilon) - L(f;P_\epsilon) < \epsilon$$

となり、ϵ は任意なので

$$U(f) \leq L(f)$$

そして、$L(f) \leq U(f)$ なので $L(f) = U(f)$ となり、ダルブー積分可能となります。

今度は、f がダルブー積分可能とします。[B4] から

$$U(f;P_1) < U(f) + \epsilon\ ,\ L(f;P_2) > L(f) - \epsilon$$

となる分割 P_1, P_2 はあります。P_1, P_2 を合わせて細分 S を作ると

$$L(f) - \epsilon < L(f;P_2) \leq L(f;S) \leq U(f;S) \leq U(f;P_1) < U(f) + \epsilon$$

ダルブー積分可能なので $L(f) = U(f)$ から

$$L(f) - U(f) = 0 < 2\epsilon$$

として、(13) になります。

[B6] 関数 f が閉区間において定数ならダルブー積分可能。

閉区間 $[a,b]$ の部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の上限と下限を、部分区間内の適当な点を c_i, c'_i として

$$M_i = f(c_i)\ ,\ m_i = f(c'_i)$$

とします。そうすると、上限和と下限和の差は

$$U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(c_i) - f(c'_i))(x_i - x_{i-1})$$

関数 f が定数なら一様連続なので

$$|f(c_i) - f(c'_i)| < \epsilon \quad (|c_i - c'_i| < \delta(\epsilon))$$

c_i, c'_i は部分区間内の点なので、$\Delta < \delta_P$ とすれば、$|c_i - c'_i| < \delta_P$ にもなるので

$$f(c_i) - f(c'_i) = M_i - m_i < \epsilon \quad (|c_i - c'_i| < \delta_P)$$

これを入れれば

$$U(f;P) - L(f;P) < \epsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a) = \epsilon'$$

となるので、f が定数ならダルブー積分可能です。

[B7] 閉区間において単調な関数はダルブー積分可能。

関数 f が閉区間 $[a,b]$ で単調増加になっているとします。$f(a) = f(b)$ では $f(x)$ は定数なので、$f(a) \neq f(b)$ とします。$f(x)$ は $[a,b]$ の間で増加し続けるので、部分区間の両端が上限か下限を与えるので、$[x_{i-1}, x_i]$ において上限と下限は

$$M_i = f(x_i)\ ,\ m_i = f(x_{i-1})$$

このため上限和と下限和の差は

$$U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$$

そうすると、分割 P での部分区間の最大の長さ Δ を使うと

$$\begin{aligned}
U(f;P) - L(f;P) &\leq \Delta\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \Delta((f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + (f(x_n) - f(x_{n-1})) \\
&= \Delta(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \Delta(f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

よって、任意の $\epsilon > 0$ を使って、$\Delta < \delta = \epsilon/(f(b) - f(a))$ とすれば

$$U(f;P) - L(f;P) < \epsilon$$

となるので、ダルブー積分可能です。単調減少では上限と下限が逆になるだけです。

[B8] 閉区間 I において連続な関数は I でダルブー積分可能。

閉区間で連続な関数は一様連続なので、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$x, c \in I$ が

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \qquad (|x - c| < \delta(\epsilon)) \tag{14}$$

となる $\delta(\epsilon)$ がいます。

最大値・最小値の定理から閉区間で連続な関数は最大値と最小値を持つので、閉区間 $I = [a, b]$ の分割 P での $[x_{i-1}, x_i]$ において

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= M_i = \sup\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
f(l_i) &= m_i = \inf\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}
\end{aligned}$$

となる u_i, l_i がいます。上限和と下限和の差は

$$U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(u_i) - f(l_i))(x_i - x_{i-1})$$

一様収束は閉区間での任意の点で (14) が成立することなので、u_i, l_i でも (14) は成立し

$$U(f;P) - L(f;P) < \epsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a) \quad (f(u_i) \geq f(l_i))$$

ϵ を $\epsilon/(b-a)$ とすれば $U(f;P) - L(f;P) < \epsilon$ なので、(13) からダルブー積分可能となります。

[B9] 閉区間 I で関数 f がリーマン積分可能なら f はダルブー積分可能であり、リーマン積分とダルブー積分は等しい。これは必要十分条件。

関数 f がリーマン積分可能とします。リーマン積分可能な関数は有界なので、上限と下限が存在します。このため、分割 P での部分区間 $[x_{k-1}, x_k]$ での上限、下限があり、それらを

$$M_i = \sup\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ ,\ m_i = \inf\{f(x)|\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

とします。点付き分割 $\dot{P}$ の t_i を $f(t_i)$ が上限と適当な定数 $\epsilon' > 0$ による $M_i - \epsilon'$ との間にいるように選んで

$$f(t_i) > M_i - \epsilon'$$

そうすると、リーマン和は

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n}(M_i - \epsilon')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - (b-a)\epsilon'$$

最右辺の第 1 項は上限和 $U(f;P)$ で、上積分 $U(f)$ とは $U(f;P) \geq U(f)$ です。なので、ついでに ϵ' を

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$$

とすれば

$$S(f;\dot{P}) \geq U(f) - \epsilon$$

そして、リーマン積分可能なときは、γ をリーマン積分として

$$-\epsilon < S(f;\dot{P}) - \gamma < \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

となっているので

$$U(f) < \gamma + 2\epsilon \tag{15}$$

となります。

部分区間の下限 m_i に対しても同様に $f(t_i) < m_i + \epsilon'$ とすれば

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}(m_i + \epsilon')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \epsilon \leq L(f) + \epsilon$$

となるので

$$-\epsilon < S(f;\dot{P}) - \gamma \leq L(f) + \epsilon$$

から

$$L(f) > \gamma - 2\epsilon$$

これを (15) から引けば

$$U(f) - L(f) < 4\epsilon \quad (U(f) \geq L(f))$$

ϵ は任意なので、$U(f) = L(f)$ です。よって、リーマン積分可能ならダルブー積分可能です。そして、任意の ϵ で

$$\gamma - 2\epsilon < L(f) = U(f) < \gamma + 2\epsilon$$

となるので、$\gamma = L(f) = U(f)$ となり、リーマン積分はダルブー積分と同じです。

今度はダルブー積分可能とします。リーマン和と上限和、下限和は定義から

$$L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P)$$

これに [B4] をくっつければ

$$L(f) - \epsilon < L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) < U(f) + \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

ダルブー積分可能なので $L(f) = U(f) = \gamma$ になっているとして

$$-\epsilon < S(f;P) - \gamma < +\epsilon$$

よって

$$|S(f;P) - \gamma| < \epsilon \quad (\Delta < \delta)$$

となり、リーマン積分可能で、リーマン積分はダルブー積分と同じです。