

連成振動

力学の振動の応用問題として出てくる質点がバネで繋がれた連成振動を見ていきます。
ここでの話は力学というより量子論を意識したものになっています。

振動するものが複数繋がっているときの振動を連成振動と言います。2重振り子は連成振動の一種です。ここでは質点がバネによって複数繋がっているものを扱います。

まずは、3個のバネが2個の質点と繋がっている場合を扱います(図1)。バネ定数は全て等しい γ とし、質点の重さは両方とも m とします。バネの伸び縮みがないときを釣り合っている状態とします。右方向を正にとり、釣り合っている位置からのそれぞれの質点 P_1, P_2 の変位を u_1, u_2 とします。

質点 P_1 の変位 u_1 の正方向の増加によって左側のバネは伸びるので、 u_1 によって左側のバネの伸び縮みが与えられます。同様に、真ん中のバネは u_2 の増加で伸び、 u_1 の増加で縮むので $u_2 - u_1$ によって、右のバネは u_2 の減少で伸びるので $-u_2$ によって、伸び縮みが与えられます。そうすると、 P_1 の運動方程式は左のバネと真ん中のバネの変化による力によって

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -\gamma u_1 + \gamma(u_2 - u_1) \quad (1a)$$

P_1 の左のバネによる振動の方向を基準に取っています。なので、振動の方向が逆になっている右辺第二項はプラスです。同様に P_2 の運動方程式は

$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -\gamma u_2 - \gamma(u_2 - u_1) \quad (1b)$$

P_2 の右のバネによる振動は P_1 の左のバネによる振動と逆方向ですが $-\gamma u_2$ となっているのは、 $\gamma(-u_2) = -\gamma u_2$ だからです。

この連立方程式は簡単に解けます。まず、解の形として $e^{-i\omega t}$ を仮定して

$$u_1 = C_1 e^{-i\omega t}, \quad u_2 = C_2 e^{-i\omega t}$$

C_1, C_2 は任意定数で初期条件から決まります。これらを入れれば、 P_1 では

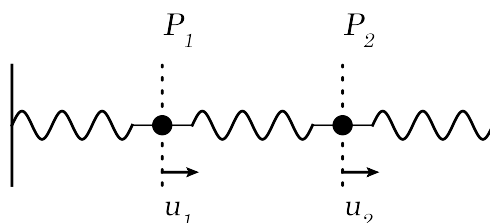


図 1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= -2\gamma u_1 + \gamma u_2 \\
-mC_1 \omega^2 e^{-i\omega t} &= -2\gamma C_1 e^{-i\omega t} + \gamma C_2 e^{-i\omega t} \\
-mC_1 \omega^2 &= -2\gamma C_1 + \gamma C_2 \\
(m\omega^2 - 2\gamma)C_1 + \gamma C_2 &= 0
\end{aligned}$$

P_2 では

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= -2\gamma u_2 + \gamma u_1 \\
-mC_2 \omega^2 e^{-i\omega t} &= -2\gamma C_2 e^{-i\omega t} + \gamma C_1 e^{-i\omega t} \\
\gamma C_1 + (m\omega^2 - 2\gamma)C_2 &= 0
\end{aligned}$$

このとき、 $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ となるためには、各項による行列式が

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - 2\gamma & \gamma \\ \gamma & m\omega^2 - 2\gamma \end{vmatrix} = 0$$

となればいいです。これから

$$\begin{aligned}
0 &= (m\omega^2 - 2\gamma)^2 - \gamma^2 \\
&= (m\omega^2 - 2\gamma - \gamma)(m\omega^2 - 2\gamma + \gamma) \\
&= (m\omega^2 - 3\gamma)(m\omega^2 - \gamma)
\end{aligned}$$

よって、角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{m}}, \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

となります。

$\omega = \sqrt{3\gamma/m}$ ではそれぞれの運動方程式は

$$\begin{aligned}
(m\omega^2 - 2\gamma)C_1 + \gamma C_2 &= 0 \Rightarrow \gamma C_1 + \gamma C_2 = 0 \\
\gamma C_1 + (m\omega^2 - 2\gamma)C_2 &= 0 \Rightarrow \gamma C_1 + \gamma C_2 = 0
\end{aligned}$$

なので、 $C_1 = -C_2$ となります。 $\omega = \omega' = \sqrt{\gamma/m}$ では

$$\begin{aligned}
(m\omega^2 - 2\gamma)C_1 + \gamma C_2 &= 0 \Rightarrow -\gamma C_1 + \gamma C_2 = 0 \\
\gamma C_1 + (m\omega^2 - 2\gamma)C_2 &= 0 \Rightarrow \gamma C_1 - \gamma C_2 = 0
\end{aligned}$$

なので、 $C_1 = C_2$ となります。

そして、 $e^{-i\omega t}$ の複素共役 $(e^{-i\omega t})^* = e^{i\omega t}$ でも同様にできるので、「単振動」のときと同じように u_1, u_2 はそれぞれの角振動数に対して

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{m}} : u_1 = Ce^{-i\omega t} + De^{i\omega t}, u_2 = -Ce^{-i\omega t} - De^{i\omega t} \quad (2a)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} : u_1 = C'e^{-i\omega' t} + D'e^{i\omega' t}, u_2 = C'e^{-i\omega' t} + D'e^{i\omega' t} \quad (2b)$$

今のように、考えてる系における各振動部分 u_1, u_2 (n 個なら u_1 から u_n) が同じ振動数を持つとき基準振動 (normal vibration) や基準モード (normal mode) と呼ばれます (単純に言えば u_1, u_2 が同じ振動数を持つ解のこと)。今は ω と ω' がそれぞれの振動振動の角振動数を与えます。

しかし、 u_1 (もしくは u_2) は 2 個の任意定数 C, D (C', D') しか持ってないので一般解になっていません。今は 2 階微分方程式の連立方程式なので、一般解は任意定数を $2 \times 2 = 4$ 個持ちます。これらから単純に一般解を作るなら、重ね合わせの考えから

$$u_1 = Ce^{-i\omega t} + De^{i\omega t} + C'e^{-i\omega' t} + D'e^{i\omega' t} \quad (3a)$$

$$u_2 = -Ce^{-i\omega t} - De^{i\omega t} + C'e^{-i\omega' t} + D'e^{i\omega' t} \quad (3b)$$

とすればよく、これが今の連成振動の一般解となります。このような基準振動による重ね合わせは振動の問題で重要になっています。

u_1, u_2 は実数ですが、exp を使った形では実数になっていないです。なので、実数になるように任意定数 C, D を書き直します。実数であるためには

$$D = C^* \quad (4)$$

であればいいです。これは $C = A + iB$ とすれば

$$\begin{aligned} Ce^{-i\omega t} + De^{i\omega t} &= C(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) + D(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\ &= (A + iB)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) + (A - iB)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\ &= 2A \cos(\omega t) + 2B \sin(\omega t) \end{aligned}$$

となるからです。なので、実数 A, α を使って

$$C = \frac{A}{2}e^{-i\alpha}, D = C^* = \frac{A}{2}e^{i\alpha} \quad (5)$$

とすれば

$$\begin{aligned}
u_1 &= Ce^{-i\omega t} + De^{i\omega t} = \frac{A}{2}e^{-i\alpha}e^{-i\omega t} + \frac{A}{2}e^{i\alpha}e^{i\omega t} \\
&= \frac{A}{2}e^{-i(\omega t + \alpha)} + \frac{A}{2}e^{i(\omega t + \alpha)} \\
&= \frac{A}{2}(\cos(\omega t + \alpha) - i\sin(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t + \alpha) + i\sin(\omega t + \alpha)) \\
&= A\cos(\omega t + \alpha)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
u_1 &= A\cos(\omega t + \alpha), \quad u_2 = -A\cos(\omega t + \alpha) \quad (\omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{m}}) \\
u_1 &= A'\cos(\omega' t + \alpha'), \quad u_2 = A'\cos(\omega' t + \alpha') \quad (\omega' = \sqrt{\frac{\gamma}{m}})
\end{aligned}$$

一般解では

$$\begin{aligned}
u_1 &= A\cos(\omega t + \alpha) + A'\cos(\omega' t + \alpha') \\
u_2 &= -A\cos(\omega t + \alpha) + A'\cos(\omega' t + \alpha')
\end{aligned}$$

となります。実際に運動方程式に入れてみれば、左辺は

$$m\frac{d^2 u_1}{dt^2} = -m(A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + A'\omega'^2 \cos(\omega' t + \alpha')) = -(3A\gamma \cos(\omega t + \alpha) + A'\gamma \cos(\omega' t + \alpha'))$$

右辺は

$$\begin{aligned}
-2\gamma u_1 + \gamma u_2 &= -2A\gamma \cos(\omega t + \alpha) - 2A'\gamma \cos(\omega' t + \alpha') - A\gamma \cos(\omega t + \alpha) + A'\gamma \cos(\omega' t + \alpha') \\
&= -3A\gamma \cos(\omega t + \alpha) - A'\gamma \cos(\omega' t + \alpha')
\end{aligned}$$

となっていることから確かめられます。後は適当な初期条件を入れて A, A', α, α' を決めればいいです。
運動方程式 (1a), (1b) を足してみると

$$m\frac{d^2}{dt^2}(u_1 + u_2) = -\gamma(u_1 + u_2)$$

引いてみると

$$m\frac{d^2}{dt^2}(u_1 - u_2) = -\gamma(u_1 - u_2) - 2\gamma(u_1 - u_2)$$

なので

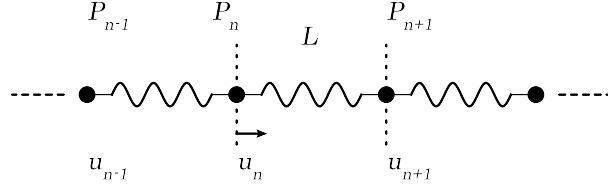


図 2

$$w_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2), \quad w_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2)$$

とします。 $1/\sqrt{2}$ はここでは意味ないですが、他の計算をするときに便利なのでつけています。これらは

$$\frac{d^2}{dt^2} w_+ = -\omega'^2 w_+ \quad (\omega' = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}) \quad (6a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} w_- = -\omega^2 w_- \quad (\omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{m}}) \quad (6b)$$

となり、基準振動を持った2つの単振動の式になります。このときの w_+, w_- を基準座標 (normal coordinate) と言います。なので、一般解 (3a) は

$$u_1 = w_- + w_+ \quad (7)$$

と書けます (u_2 でも同様)。これは、連立方程式から基準座標による2つの独立な単振動の式を作り、その解を足せば一般解になることを表しています。また、振動が (6a)(もしくは (6b)) のように書けることを振動振動と言うこともできます。

今の話を一般化します。 N 個の質点が間隔 L でバネでつながっているとし、 n 番目の質点 P_n の運動を考えます (図2)。状況設定は同じで、全ての質点の質量は m 、バネ定数は γ とし、バネの伸び縮みがないときを釣り合っている状態とします。質点 P_n の変位は u_n とし、右方向を正にとります。

もう1つ条件として、 N 番目の質点の隣は $n = 1$ の質点とします ($u_{N+1} = u_1$)。つまり、 $u_{n+N} = u_n$ とします。これは円上に質点が並ぶようにすることに対応し、このようにある所でもとに戻るという条件を周期的境界条件と言います。周期的境界条件を使うので、今から求める結果は最初の結果 (両端が固定されている場合) と一致しません。

質点の運動方程式は今の結果を少し変更するだけで求まります。上では左側のバネはただの単振動としましたが、今の P_n では左側の質点 P_{n-1} の変位 u_{n-1} が存在します。そうすると、 $n-1$ 番目の質点 P_{n-1} と P_n の間のバネの伸び縮みは、 u_{n-1} の増加で縮み、 u_n の増加で伸びることから、 $u_n - u_{n-1}$ と与えられます。よって質点 P_n の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_n}{dt^2} &= -\gamma(u_n - u_{n-1}) + \gamma(u_{n+1} - u_n) \\ &= -2\gamma u_n + \gamma u_{n+1} + \gamma u_{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

これの解を見つけます。

これは N 個の微分方程式による連立方程式で

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= \gamma(-2u_1 + u_2) \\
m \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= \gamma(u_1 - 2u_2 + u_3) \\
m \frac{d^2 u_3}{dt^2} &= \gamma(u_2 - 2u_3 + u_4) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

として続いていきます。質点が2個の場合では独立な単振動の式 (6a),(6b) から解が (7) で与えられたことを踏まえて、ここでも独立な単振動の式になるようにします。

質点の数を増やしたただけなので重ね合わせの原理から、(3a),(3b) のように適当な解 $q_n^{(l)}(t)$ によって

$$u_n(t) = \sum_l q_n^{(l)}(t)$$

という形に書けるはず (l は解の区別)。整数 l の範囲は後で決めます。そして、質点2個のときと同じように時間依存性は分離できると考えて、 $u_n(t)$ は $q_n^{(l)}(t) = F_n(l)X(l,t)$ として

$$u_n(t) = \sum_l F_n(l)X(l,t) \quad (9)$$

と展開できるとします。 $F_n^{(l)}, X_n^{(l)}$ と書くと思つたので、 $F_n(l), X(l,t)$ と書いてます。 $X(l,t)$ は時間依存性を省いて $X(l)$ とも書きます。この展開によって (7) と同じようにできる $X(l,t)$ を作ります。

運動方程式に入れてみれば

$$mF_n(l) \frac{d^2}{dt^2} X(l,t) = \gamma \sum_l X(l,t) (-2F_n(l) + F_{n+1}(l) + F_{n-1}(l))$$

これではまだ連立しているままです。ここで F_n を (5) から

$$F_n(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\alpha(l)n}$$

とします。 $\alpha(l)$ は実数で、係数を $1/\sqrt{N}$ としているのは利便性 (規格化) のためです (下の補足参照)。 n は整数なので、 l による区別は α にしか与えられないので $\alpha(l)$ としています。この形からすぐ分かるように

$$F_{n\pm 1}(l) = F_n(l) e^{\pm i\alpha(l)}$$

という性質を持ちます。なので

$$mF_n(l) \frac{d^2}{dt^2} X(l) = \gamma \sum_l X(l) (-2F_n(l) + F_n(l) e^{i\alpha(l)} + F_n(l) e^{-i\alpha(l)}) \quad (10)$$

となり、 n 番目だけの方程式になります。よって、連立ではなくなり、この 2 階微分方程式を単独で解けばいいです。

$F_n(l)$ の性質を求めていきます。 $\alpha(l)$ は任意定数でなく、周期的境界条件によって決定できます。周期的境界条件 $u_{n+N} = u_n$ は $F_n(l)$ に対して

$$u_{n+N} = u_n \Rightarrow q_{n+N}^{(l)} = q_n^{(l)} \Rightarrow F_{n+N}(l) = F_n(l)$$

となるので、

$$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\alpha(l)(n+N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\alpha(l)n}$$

$$e^{i\alpha(l)N} = 1$$

これは、整数 l によって $\alpha(l)N = 2\pi l$ とすれば成立します ($\sin(\pm 2\pi) = 0$, $\cos(\pm 2\pi) = 1$)。これから

$$F_n(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\alpha(l)n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[in \frac{2\pi}{N} l] \quad (\alpha(l) = \frac{2\pi}{N} l) \quad (11)$$

となります。さらに、 $l = N + j$ (j は整数) のとき、 n が整数であるために

$$\exp[in \frac{2\pi}{N} (N + j)] = \exp[in 2\pi j + in \frac{2\pi}{N}] = \exp[in \frac{2\pi}{N} j]$$

となりますが、これは $l = j$ のときと同じです。このように、 j に N を加えれば元に戻るために、 l は $N - 1$ 内で考えれば十分です。よって、 l の範囲は $N - 1$ 内であれば任意なので、 N を偶数として

$$-\frac{N}{2} + 1 \leq l \leq \frac{N}{2} \quad (12)$$

とします (第一ブリュアンゾーン)。他にも、例えば 0 から $N - 1$ と選ぶことも可能です。これから、 l で区別される $F_n(l)$ は N 個あります。

導出は下の補足に回しますが、ここでの F_n は性質として

$$\sum_{n=1}^N F_n^*(l') F_n(l) = \delta_{l'l} \quad (13)$$

$$\sum_l F_n^*(l) F_n(l) = \delta_{n'n} \quad (14)$$

というのを持ちます。 l の範囲は (12) で、 δ_{ij} (i, j は整数) はクロネッカーデルタです ($i = j$ なら $\delta_{ij} = 1$ 、 $i \neq j$ なら $\delta_{ij} = 0$)。

l は範囲 (12) での整数と求まったので、(10) に $F_n^*(l')$ をかけて、 n の和を取るようにし (13) を使えば

$$\begin{aligned}
m \sum_{n=1}^N F_n^*(l') F_n(l) \frac{d^2 X(l)}{dt^2} &= \gamma \sum_l X(l) \sum_{n=1}^N F_n^*(l') (-2F_n(l) + F_n(l)e^{i\alpha(l)} + F_n(l)e^{-i\alpha(l)}) \\
m \delta_{l'l} \frac{d^2 X(l)}{dt^2} &= \gamma \sum_l X(l) \delta_{l'l} (-2 + e^{i\alpha(l)} + e^{-i\alpha(l)}) \\
m \frac{d^2 X(l')}{dt^2} &= \gamma X(l') (-2 + e^{i\alpha(l')} + e^{-i\alpha(l')}) \\
\frac{d^2 X(l)}{dt^2} &= 2 \frac{\gamma}{m} (-1 + \cos \alpha(l)) X(l) \\
&= -\omega^2(l) X(l)
\end{aligned} \tag{15}$$

これから、 $X(t)$ は単振動の式に従っていることが分かります。4 行目で l' は l に書き換えてます。 ω は

$$\omega(l) = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}(1 - \cos \alpha(l))} = \sqrt{\frac{4\gamma}{m} \sin^2 \frac{\alpha(l)}{2}} = \sqrt{\frac{4\gamma}{m}} \left| \sin \frac{\alpha(l)}{2} \right| = \sqrt{\frac{4\gamma}{m}} \left| \sin \frac{\pi}{N} l \right| \quad (1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

と与えられています。|| は絶対値です。(15) はただの単振動なので

$$X(l, t) = c(l) e^{-i\omega(l)t}$$

$c(l)$ は任意定数、 $\omega(l)$ は角振動数です。(15) は l によって区別される微分方程式なので、異なる l では任意定数も異なるので $c(l)$ としています。一般解は、複素共役にしたものを足せばいいので

$$X(l, t) = c(l) e^{-i\omega(l)t} + d(l) e^{i\omega(l)t}$$

となります。

というわけで、 $u_n(t)$ は

$$u_n(t) = \sum_l F_n(l) X(l, t) \quad \left(\frac{N}{2} < l \leq \frac{N}{2} \right)$$

$$X(l, t) = c(l) e^{-i\omega(l)t} + d(l) e^{i\omega(l)t}, \quad F_n(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[i\alpha(l)n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[in \frac{2\pi}{N} l]$$

となります。最初の場合で変位 u_1, u_2 は実数であるために、(4) として任意定数を複素共役で繋いだように、ここでも $c(l)$ と $d(l)$ は関係を持ちます。

u_n は実数 $u_n = u_n^*$ であることからの $X(l, t)$ の制限を求めます。 $F_n(l)$ は複素共役を取ってみればすぐに分かるように

$$F_n^*(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-in \frac{2\pi}{N} l] = F_n(-l)$$

これを使うと

$$u_n^*(t) = \sum_l F_n^*(l) X^*(l, t) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} F_n(-l) X^*(l, t)$$

なので、もし $X^*(l, t) = X(-l, t)$ なら

$$\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} F_n(-l) X^*(l, t) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} F_n(-l) X(-l, t) = \sum_{l=N/2-1}^{-N/2} F_n(l) X(l, t) \quad (16)$$

これは l の符号が反転しただけなので、 l の範囲は $N-1$ のままです。このため u_n を展開した形のままだので (展開するときの和は範囲が $N-1$ 内ならなんでもいい)、 $X^*(l, t) = X(-l, t)$ とすることで、 $u_n^* = u_n$ となります。よって、 $F_n(l)$ と $X(l, t)$ は複素共役に対して

$$F_n^*(l) = F_n(-l), \quad X^*(l, t) = X(-l, t)$$

となります。

$X(l, t)$ の制限から $c(l), d(l)$ の複素共役に制限が付きます。 $X(l, t)$ の制限から ($\omega(-l) = \omega(l)$, $\omega^*(l) = \omega(l)$)

$$X^*(l, t) = X(-l, t)$$

$$c^*(l) e^{i\omega(l)t} + d^*(l) e^{-i\omega(l)t} = c(-l) e^{-i\omega(l)t} + d(-l) e^{i\omega(l)t}$$

これから

$$c^*(l) = d(-l), \quad d^*(l) = c(-l)$$

となり、 $d(l) = c^*(-l)$ が分かるので

$$X(l, t) = c(l) e^{-i\omega(l)t} + c^*(-l) e^{i\omega(l)t}$$

と書けます。

よって、 u_n が実数であることを踏まえれば

$$u_n(t) = \sum_l (c(l) e^{-i\omega(l)t} + c^*(-l) e^{i\omega(l)t}) F_n(l)$$

第二項の $c^*(-l)$ を $c^*(l)$ に書き換えることもできます。 $u_n(t)$ は

$$u_n(t) = \sum_l c(l) e^{-i\omega(l)t} F_n(l) + \sum_l c^*(-l) e^{i\omega(l)t} F_n(l)$$

第二項は $F_n^*(l) = F_n(-l)$ と (16) と同じ話から

$$\sum_{-l} c^*(l) e^{i\omega(l)t} F_n(-l) = \sum_{-l} c^*(l) e^{i\omega(l)t} F_n^*(l) = \sum_l c^*(l) e^{i\omega(l)t} F_n^*(l)$$

となるので

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \sum_l (c(l) e^{-i\omega(l)t} F_n(l) + c^*(l) e^{i\omega(l)t} F_n^*(l)) \\ &= \sum_l (c(l) e^{-i\omega(l)t} e^{i\alpha(l)n} + c^*(l) e^{i\omega(l)t} e^{-i\alpha(l)n}) \end{aligned}$$

と書けます。

この結果は角振動数 $\omega(l)$ を持っている単振動の重ね合わせと見れます。なので、 $\omega(l)$ は基準振動で、 $X(l, t)$ は基準座標です。ここでの話は、(9) による変換で u_n を基準座標 $X(l, t)$ にしたということです。

また、ここまでしてきた話はフーリエ展開を知っている人なら (9) と書いた時点で、結果は予想できたと思います。フーリエ展開の言葉にすれば、 u_n を直交系 $F_n(l)$ を用いて展開した結果と言えます。

まだ $\alpha(l)$ が何を表しているのかははっきりしていないので、具体的な量にします。適当な l の部分を取り出したとして

$$q_n^{(l)} = c(l) e^{-i(\omega(l) - \alpha(l)n)t} + c^*(l) e^{i(\omega(l) - \alpha(l)n)t}$$

$c(l)$ を $Ae^{i\beta}$ とすれば

$$q_n^{(l)} = A(e^{-i(\omega(l) - \alpha(l)n - \beta)t} + e^{i(\omega(l) - \alpha(l)n - \beta)t}) = A \cos(\omega(l) - \alpha(l)n - \beta)$$

β は初期位相なので無視すれば、これは 1 次元平面波 $\cos(\omega t - kx)$ と同じ形です。 k は波数、 x は位置です。なので、 $\alpha(l)$ を波数 k と質点の間隔 L によって

$$\alpha(l) = kL$$

とします。間隔 L を使うのは n 番目の質点の位置は nL だからです。(11) とあわせれば

$$k = \frac{2\pi}{NL} l \quad (17)$$

そうすると、 u_n はよくある表記を使うと

$$u_n(t) = \sum_k (c_k e^{-i\omega_k t} e^{ikLn} + c_k^* e^{i\omega_k t} e^{-ikLn})$$

と書けます。 $c(l)$ を c_k のように添え字にし、(17) から k は l を含んでいるので形式的に k の和としています。この形は量子論でも現れて、例えばフォノンを扱うときに出てきます。

波数が出てきたことからなんとなく予想できるように、(8) は波動方程式にできます。これを簡単に見ておきます。まず、質点の変位を u_n として質点の区別による n でなく質点の位置 x に変えます。つまり、 $u_n(t)$ を $u(x, t)$

とします。 x は n 番目の質点の位置なので $x = nL$ です。 $n \pm 1$ 番目の位置は $(n \pm 1)L = x \pm L$ となります。この書き換えによって (8) は

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -2\gamma u(x, t) + \gamma u(x + L, t) + \gamma u(x - L, t)$$

$u(x, t)$ の x は u_n の n に対応することから時間微分とは無関係なので、左辺は偏微分にしています。 L が十分小さいとして、 $u(x \pm L, t)$ を $L = 0$ まわりでテーラー展開すると、 L^2 までで

$$u(x \pm L, t) \simeq u(x, t) \pm \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} L^2$$

これを右辺に入れると

$$\gamma(-2u(x, t) + u(x + L, t) + u(x - L, t)) = \gamma L^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

これだと L が残ってしまうので変形します。

振動していないときの全体の長さが D として与えられていれば、 $L \rightarrow 0$ は質点の数の $N \rightarrow \infty$ に対応します。バネ、質点、バネ、質点、バネとして並んでいるとして、 $D = (N + 1)L$ と全体の質量を $M = Nm$ から質量密度は

$$\rho = \frac{M}{D} = \frac{N}{N + 1} \frac{m}{L} \Rightarrow \frac{m}{L}$$

D, M は対象の設定として与えられるので質量密度は固定できるとします。固定できるためには $m \rightarrow 0$ が要求されます。これらによって、 $N \rightarrow \infty$ で (8) は

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\gamma L}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

このように、振動している質点が隙間なく連続的に並んでいるとした極限 (連続極限) で波動方程式となります。波動方程式での右辺の係数は速度に対応し、それは有限の値を持ちます。なので

$$\gamma = \frac{\gamma'}{L}$$

として新しく γ' を作れば、 γ' を対象に合わせた適当な値とできます。このため、 $\gamma \rightarrow \infty$ が要求されます。というわけで

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (v = \sqrt{\frac{\gamma'}{\rho}})$$

として、波の伝わる速度 v が与えられます。

・補足

(13),(14) を示します。(13) は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N F_n^*(l') F_n(l) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-i \frac{1}{N} 2\pi n l'] \exp[i \frac{1}{N} 2\pi n l] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-i \frac{2\pi}{N} n(l-l')] \\
&= \frac{1}{N} (\exp[-i \frac{2\pi}{N} (l-l')] + \exp[-i \frac{2\pi}{N} 2(l-l')] + \cdots + \exp[-i \frac{2\pi}{N} N(l-l')]) \quad (18)
\end{aligned}$$

見て分かるように、 $a = \exp[-i2\pi(l-l')/N]$ とすれば

$$\sum_{n=1}^N \exp[-in \frac{2\pi}{N} (l-l')] = a + a^2 + \cdots + a^N$$

となっており、これは等比級数です。なので、 $l \neq l'$ のとき等比級数の公式

$$\sum_{j=1}^N a^{j-1} = \frac{1-a^N}{1-a}$$

を使えば

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-in \frac{2\pi}{N} (l-l')] = \frac{1 - \exp[-i2\pi(l-l')]}{1 - \exp[-i2\pi(l-l')/N]}$$

l, l' は整数なので $l-l'$ も整数です。このため

$$\exp[-i2\pi(l-l')] = 1$$

$$\exp[-i2\pi(l-l')/N] \neq 1$$

分母にいる $\exp$ では N で割られているので、1 にならないです。このため分子が 0 になるので、 $l \neq l'$ のとき

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-i \frac{1}{N} 2\pi n(l-l')] = 0 \quad (l \neq l')$$

$l = l'$ では、(18) の全ての項で $\exp$ は 1 なので

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-i \frac{1}{N} 2\pi n(l-l')] = \frac{1}{N} N = 1 \quad (l = l')$$

よって、結果はクロネッカーデルタ δ_{ij} でまとめられて

$$\sum_{n=1}^N F_n^*(l') F_n(l) = \delta_{l'l}$$

となります。この関係を直交性と言います。 $F_n(l)$ の係数を $1/\sqrt{N}$ にしたのは、途中計算から分かるように、この右辺に余計な係数が出てこなくなるからです。

(14) は

$$\sum_l F_{n'}^*(l) F_n(l) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \exp\left[i \frac{1}{N} 2\pi(n-n')l\right]$$

l の和の範囲を 1 から N にするために、 $l' = l + N/2$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \exp\left[i(n-n') \frac{2\pi}{N} l\right] &= \frac{1}{N} \sum_{l'=1}^N \exp\left[i(n-n') \frac{2\pi}{N} (l' - \frac{N}{2})\right] \\ &= \frac{1}{N} \exp[-i\pi(n-n')] \sum_{l'=1}^N \exp\left[-i \frac{1}{N} 2\pi l'(n'-n)\right] \end{aligned}$$

和の形を見ると、 n と l' の違いはありますが、(13) と同じです。なので、 l' の和は

$$\frac{1}{N} \sum_{l'=1}^N \exp\left[-i \frac{1}{N} 2\pi(n'-n)l'\right] = \delta_{nn'}$$

これから

$$\sum_l F_{n'}^*(l) F_n(l) = \exp[-i\pi(n-n')] \delta_{nn'}$$

クロネッカーデルタは $n = n'$ のとき 1 なので、 $n = n'$ では

$$\exp[-i\pi(n-n')] \delta_{nn'} = 1 \quad (n = n')$$

$n \neq n'$ ではクロネッカーデルタは 0 なので

$$\exp[-i\pi(n-n')] \delta_{nn'} = 0 \quad (n \neq n')$$

つまり、結果は $\exp$ 部分とは無関係にクロネッカーデルタで書けてしまうので

$$\exp[-i\pi(n-n')] \delta_{nn'} = \delta_{nn'}$$

よって

$$\sum_l F_{n'}^*(l) F_n(l) = \delta_{nn'}$$

となります。