弦の振動

両端を固定したときの弦の振動について見ていきます。起こる振動は横振動（弦に垂直に振動するもの）のみを考えます。
下の補足で簡単に偏微分に触れていますが、偏微分は知っているとしています。

振動している弦のある地点での高さ (y 軸) を表す関数 $y(x,t)$ を求めます (t は時間)。振動の高さは x 軸 (横軸) にも依存するので x も変数にします。$y(x,t)$ を変位と呼んでいきます。
まずは、弦の微小部分 δx (x と $x+\delta x$ の間) における振動を考えます。T を張力とし、弦の接線方向を向いています。そして、弦の張力 T は一定とします。これは振動中も張力は同じとすることで、弦全体から見れば振動 (変位) は張力を変化させるほど大きくないとすることです。そして、T の方向も水平に近いとし、張力方向との角度は十分小さいと考えます。図にすれば

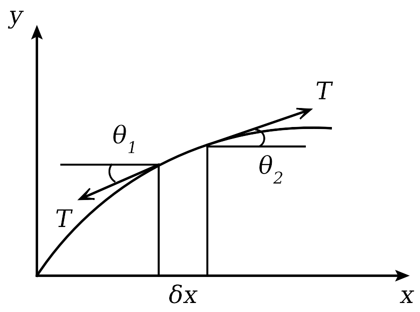

図 1

微小部分を切り出せば

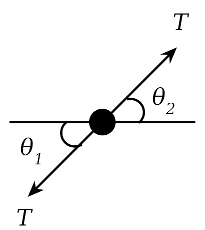

図 2

黒丸の部分が微小部分です。この微小部分 δx の質量は、線密度 (1 次元での体積密度) を ρ とすれば、$\rho\delta x$ になります。密度は一定とします。
微小部分の運動方程式を作ります。ある時間 t での適当な位置 x_0 での変位を $y(x_0,t)$ とします。この位置から Δx 離れた地点では $y(x_0+\Delta x,t)$ と与えられます。この 2 点の差は

$$\Delta y = y(x_0+\Delta x,t) - y(x_0,t)$$

となり、Δx で割れば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0+\Delta x,t) - y(x_0,t)}{\Delta x}$$

これの $\Delta x \to 0$ の極限を取れば、点 x_0 での偏微分

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0+\Delta x, t) - y(x_0, t)}{\Delta x}$$

となります。そして、もし点 x_0 での弦の接線を伸ばしたとき、$x_0+\Delta x$ で $y(x_0+\Delta x, t)$ の地点にいくなら、接線と水平方向の角度 ϕ は

$$\tan\phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

しかし、弦は曲線で、x_0 の接線は $x_0+\Delta x$ で $y(x_0+\Delta x, t)$ には行きません。このため、曲線の間隔を十分小さくすれば曲線は直線と見なせることを利用して、Δx は十分小さいとして x_0 と $x_0+\Delta x$ の間の曲線は直線と見なします。そうすることで

$$\tan\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$$

となります。

y 方向に作用している力は図から

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

θ_1, θ_2 は十分小さいとするので

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \simeq \sin\theta \quad (\cos\theta \simeq 1 \ \theta \ll 1)$$

を使って

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \simeq T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1$$

そうすると、$\tan\theta_1, \tan\theta_2$ は偏微分によって

$$\begin{aligned}
T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 &= T(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}) \\
&= T(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x - \frac{\partial y}{\partial x})\Big|_{x} \\
&= T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x
\end{aligned}$$

1 行目から 2 行目へは、θ_2 は位置 $x+\Delta x$ の角度なので、テイラー展開

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

を $f(x) = \partial y/\partial x$ として実行しています。

これで微小部分に作用しているる力が求まったので (重力は無視)、質量 $\rho\Delta x$ から運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

この関係は弦のどの場所でも成り立つので、弦全体でこの方程式を満たさなければなりません。このような形をした時間と位置の 2 階偏微分を含む偏微分方程式を波動方程式 (wave equation) と呼びます。

(1) の解を求めるために、解の形を

$$
y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \alpha)
$$

と仮定します。単振動と違うのは、振幅 A が x の関数になっている点です。振幅を x の関数とする理由は、弦を質点が連続したものと考えれば、その各部分の振幅が x の連続関数 (途中で途切れない線が書ける関数になるからです。

これを (1) に入れると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(x)\cos(\omega t+\alpha)) &= \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x)\cos(\omega t+\alpha)) \\
-\omega^2 A(x)\cos(\omega t+\alpha) &= \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x)\cos(\omega t+\alpha)) \\
-\omega^2 A(x) &= \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} &= -\frac{\rho\omega^2}{T}A(x)
\end{aligned}
$$

このように単振動と同じ微分方程式の形になるので、「単振動」で求めたように一般解は

$$
A(x) = B_1\cos(\sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega x) + B_2\sin(\sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega x)
$$

B_1, B_2 は定数です。よって、弦の y 方向の変位は

$$
y(x,t) = (B_1\cos(kx) + B_2\sin(kx))\cos(\omega t+\alpha) \qquad (k = \sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega)
$$

このように、弦の各地点の値が $A(x)$ として与えられ、そこに時間依存する cos が積としてくっついて、y 方向の変位を与えています。つまり、時間変化にともなって弦の各地点が上下に振動するという弦の振動のイメージそのものの解になっています。このように、同じ地点で振動する波を定常波 (standing wave, stationary wave) と言います。これに対して、波が移動していく場合を進行波 (travelling wave, progressive wave) と言い、これは「波動方程式」で扱います。

また、弦の振動において $y = 0$ の点は

$$
B_1\cos(kx) + B_2\sin(kx) = 0
$$

となる x で与えられ、その地点は時間と無関係なのが分かります。このように、弦の振動において変位が常に 0(振幅が 0) となる点を節 (node) と言い、振幅が最大となる地点は腹 (anti-node, loop) と呼ばれます。

節の位置について簡単に分かることを示します。例えば、$x = 0$ で $y = 0$ になっているとすれば

$$B_1 \cos(kx) + B_2 \sin(kx) = B_1 = 0$$

として、$B_1 = 0$ と決まるので

$$B_2 \sin(kx) = 0$$

ここで三角関数の性質を持ち込みます。sin は 2π で値が一周するので、$x = x_0$ での sin の値は

$$x = x_0 \ , \ x = x_0 + \frac{2\pi}{k}, \ x = x_0 + \frac{4\pi}{k}, \ x = x_0 + \frac{6\pi}{k}, \ \ldots$$

で同じ値を持ちます。このときの

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

を波長 (wavelength) と呼び、振動が周期的になっている長さを与えます。そうすると

$$B_2 \sin(k\frac{\lambda}{2}) = B_2 \sin(k\frac{\pi}{k}) = B_2 \sin\pi = 0$$
$$B_2 \sin(k\lambda) = B_2 \sin(k\frac{2\pi}{k}) = B_2 \sin(2\pi) = 0$$
$$B_2 \sin(k\frac{3}{2}\lambda) = B_2 \sin(k\frac{3\pi}{k}) = B_2 \sin(3\pi) = 0$$

と続いていきます。よって、節は波長の半分の長さごとに現れます。

具体的な振動の形を知るためには、後は条件を与えて定数 B_1, B_2 を決定すればいいです。そのために、弦の両端は固定されているという条件を与えます。初期条件は時間 t に対して与えたのに対して、これは位置 x に対する条件です。このような位置に関する条件を境界条件 (boundary condition) と言います。

両端を固定するので、L を弦の長さとして境界条件を

$$A(0) = 0 \ , \ A(L) = 0$$

と与えます。この条件から

$$B_1 \cos(0) + B_2 \sin(0) = 0 \ \Rightarrow \ B_1 = 0$$
$$B_2 \sin(\sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega L) = 0 \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi}{L}n(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

といったものが出てきます。2 番目のは sin の性質から π の整数倍は全て 0 になることからです。これらによって、弦は x に対して、B_2 を C と書くことにして

$$A(x) = C\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

という振幅を持つのがわかり、波数 (2π の間の波の数) が n の値になります。

$y(x,t)$ は

$$y_n(x,t) = C\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t+\alpha)$$

整数 n にも依存しているので y_n としています。これを固有振動と言い、$n=1$ のときを fundamental mode と言ったりします。$\sqrt{T/\rho}\pi n/L$ は固有振動数と呼ばれます。

これらを重ね合わせて

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(\frac{\pi x}{L}n)\cos(\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi}{L}nt+\alpha_n)$$

としたものも解となります。弦の振動はこのように固有振動の重ね合わせによって与えられます。この式では、重ね合わせはいろいろな振動をしているものを足し合わせるという意味が分かりやすいです。

ここでの振幅の計算は量子力学でも同じように出てきます。理由は単純で、解くべき方程式が同じ形で、境界条件の取り方も同じだからです。なので、今の結果での整数 n が、量子力学でのエンルギーや運動量の離散的な性質と対応します

まだ決まっていない C_n, α_k は初期条件によって決まります。2 階微分方程式なので初期条件を

$$y(x,0) = y_0(x)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x)$$

として、$t=0$ での弦の変位 (弦の形) とその速度を与えます。2 つの三角関数の和の形のほうが分かりやすいので、任意定数を再定義して

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi x}{L}n)(D_n\sin(\lambda\frac{\pi n}{L}t)+F_n\cos(\lambda\frac{\pi n}{L}t)) \quad (\lambda = \sqrt{\frac{T}{\rho}})$$

とします。初期条件を入れれば

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\sin(\frac{\pi x}{L}n)\ ,\ v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\pi n}{L}D_n\sin(\frac{\pi x}{L}n)$$

D_n, F_n の式にするために、三角関数の積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\sin(mx)\sin(nx)$$

を使います (m, n は整数)。この積分は $m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{m-n}\big[\sin(m-n)x\big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m+n}\big[\sin(m+n)x\big]_{-\pi}^{\pi}\big)$$
$$= 0$$

$m=n$ では

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2 nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ (1-\cos 2nx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \cos 2nx$$
$$= \pi - \frac{1}{2}\frac{1}{2n}\big[\sin 2nx\big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \pi$$

これを今の場合に合わせると、$m=n$ で

$$\int_{-L}^{L} dx \sin(\frac{\pi}{L}mx)\sin(\frac{\pi}{L}nx) = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(mx')\sin(nx') = L \quad (x' = \frac{\pi}{L}x\ ,\ dx' = \frac{\pi}{L}dx)$$

$m \neq n$ では 0 です。また、弦の長さは 0 から L なので、それにも合わせて

$$\int_{0}^{L} dx\ \sin(\frac{\pi}{L}mx)\sin(\frac{\pi}{L}nx) = \frac{L}{2}$$

そうすると、$m=n$ のとき値を持つので

$$\int_{0}^{L} dx\ y_0(x)\sin(\frac{\pi x}{L}m) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{-L}^{L} dx \sin(\frac{\pi x}{L}m)\sin(\frac{\pi x}{L}n) = \frac{L}{2}F_m$$
$$\int_{0}^{L} dx\ v_0(x)\sin(\frac{\pi x}{L}m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda\pi n}{L} D_n \int_{-L}^{L} dx \sin(\frac{\pi x}{L}m)\sin(\frac{\pi x}{L}n) = \frac{\lambda\pi m}{2}D_m$$

となり

$$D_m = \frac{2}{\lambda\pi m}\int_{0}^{L} dx\ v_0(x)\sin(\frac{\pi x}{L}m)\ ,\ F_m = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} dx\ y_0(x)\sin(\frac{\pi x}{L}m)$$

後は具体的な y_0, v_0 を与えればいいです。ちなみに、こういった計算はフーリエ級数と関係しています (数学の「フーリエ級数」参照)。

弦が持っているエネルギーを求めます。弦全体の運動エネルギー K は、弦を質量 m の質点に分解し、質点が y 軸方向に振動しているとして、それらの運動エネルギーを足したものと考えられます。しかし、これは理想化した状況なので (質点は大きさがない)、最初は弦を微小な幅 Δx で区切ります。微小な幅の中心を位置 x とすれば、x での微小な幅の運動エネルギーとして

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho\Delta x(\frac{\partial y}{\partial t})^2$$

$\rho\Delta x$ は微小な幅での質量、y 方向に動いているので速度 $v(x)$ は $\partial y/\partial t$ です。これらを足し合わせれば全体の運動エネルギーになります。しかし、区切った幅をなくさないと弦にはならないので、$\Delta x \to 0$ の極限を取ります。そうすると、和は積分になり

$$K = \frac{1}{2}\rho\int_0^L dx(\frac{\partial y}{\partial t})^2$$

ポテンシャル V も同様に求めます。ポテンシャルは張力によるので、適当な微小部分において、振動していないときの微小な長さ Δx と、振動によって伸びたときの微小な長さ Δs の差によって

$$\Delta V = T(\Delta s - \Delta x) = T\Delta x(\frac{\Delta s}{\Delta x} - 1)$$

Δs は

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

なので

$$\begin{aligned}\Delta V = T\Delta s - T\Delta x &= T\Delta x(\sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} - 1)\\ &= T\Delta x(\sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} - 1)\\ &\simeq T\Delta x(1 + \frac{1}{2}(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2 - 1)\\ &= \frac{1}{2}T(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2\Delta x\end{aligned}$$

下から 2 行目で、x 軸と張力方向との角度は十分小さいとしていることから (変位 y は急激に変化しない)、$(\Delta y/\Delta x)^2$ は微小としてます。運動エネルギーと同じにように $\Delta x \to 0$ の極限で和は積分になり ($\Delta y/\Delta x$ は微分になる)、全体のポテンシャルは

$$V = \frac{1}{2}T\int_0^L dx(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

よって、弦のエネルギーは

$$E = K + V = \int_0^L dx(\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}T(\frac{\partial y}{\partial x})^2) = \int_0^L dx\ \epsilon(x,t)$$

となります。E を質量、ϵ を質量密度と思えば、これは質量密度を積分して全体の質量を求める式と同じになっています。なので、ϵ はエネルギー密度 (単位長さあたりのエネルギー) と呼ばれます。

力学的エネルギーの保存は運動方程式を変形したものなので、波動方程式の変形から同様の関係が導かれます。波動方程式 (1) に $\rho(\partial y/\partial t)$ をかけて

$$\rho\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

左辺は

$$\rho\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial t})^2$$

と変形し、右辺を

$$T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x})-T\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}=T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x})-\frac{T}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x})=T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x})-\frac{T}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

と変形させると

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial t})^2&=T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x})-\frac{T}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x})^2\\ \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho}{2}(\frac{\partial y}{\partial t})^2+\frac{T}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2)&=T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}) \qquad (2)\end{aligned}$$

左辺は

$$\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^2+\frac{1}{2}T(\frac{\partial y}{\partial x})^2=\epsilon(x,t)$$

となっているので、エネルギー密度を時間で偏微分したものです。このため、左辺はエネルギーの時間微分、右辺はそのエネルギーの変化を表しているように見えます。これをはっきりさせます。

(2) の右辺を

$$\mathcal{I}(x,t)=-T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

とすれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}(x,t)$$

となっており、これは連続の方程式と呼ばれる形です。意味を分かりやすくするために x で積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^L dx\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho}{2}(\frac{\partial y}{\partial t})^2+\frac{T}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2)=&-\int_0^L dx\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}(x,t)\\ \int_0^L dx\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(x,t)=&\ \mathcal{I}(0,t)-\mathcal{I}(L,t)\end{aligned}$$

右辺は t を定数として x の微分を行い、x で積分するという式なので、常微分と積分の関係と同じです。弦の長さは時間に無関係に L に固定されているので、左辺の時間微分は積分の外に出せて

$$\frac{d}{dt}\int_0^L dx\epsilon(x,t) = \frac{dE}{dt}$$

時間の偏微分を常微分にしているのは、x の積分が行われた後の $E(t)$ を微分するからです。よって

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{I}(0,t) - \mathcal{I}(L,t)$$

となり、ある時間 t でのエネルギーの時間変化は弦の 2 つの位置での $\mathcal{I}(x,t)$ の差と等しくなります。もっと直接的に見るなら、Δt を微小な時間として

$$\Delta E = (\mathcal{I}(0,t) - \mathcal{I}(L,t))\Delta t$$

と書けば、ある時間 t での単位時間あたりのエネルギー変化が $x=0$ と $x=L$ での $\mathcal{I}$ の差になっているのが分かります。このことから、$x=0$ での $\mathcal{I}(0,t)$ と $x=L$ での $\mathcal{I}(L,t)$ の値が異なっていると、弦全体のエネルギーが変化します。これを $x=0$ と $x=L$ の地点でエネルギーの移動が起きていると解釈して、$\mathcal{I}$ をエネルギーフラックス (energy flux) やエネルギーの流れと言ったりします。

・補足

偏微分の覚えておいた方がいい性質をいくつか載せておきます。偏微分の定義自体は通常の微分とほぼ同じで

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

これは 2 変数の場合ですが、変数を増やしても同じです。単に微分しない変数を固定しろと言っているだけです。変数 x,y が別の変数 t に依存しているときの関数 $f(x(t),y(t))$ に対する連鎖律は

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となっています。1 変数の微分での連鎖律

$$\begin{aligned}
\frac{df(x(t))}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t)) - f(x(t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta t} \qquad (\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

から予想できる形 ($\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ なので $\Delta t \to 0$ で $\Delta x \to 0$) ですが、偏微分で同じように証明するのは結構面倒なので省きます。これはさらに x, y が $x(u,v), y(u,v)$ のように 2 変数に依存している場合では

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial}{\partial v} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となります。左辺が偏微分なのは $f(x(u,v), y(u,v)) = g(u,v)$ と見なせるからです。

$x = a, y = b$ 周りでのテイラー展開は ($\Delta x = x - a,\ \Delta y = (y - b)$)

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x=a,y=b}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{x=a,y=b}\Delta y\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big|_{x=a,y=b}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big|_{x=a,y=b}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big|_{x=a,y=b} 2\Delta x \Delta y\Big) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x,y)\big|_{x=a,y=b} + \cdots \end{aligned}$$

実用上 2 次まで知っておけば問題はないです。厳密なことを言えば剰余項もありますが、気にしなくてはいけないときに引っ張り出せばいいです。また、3 変数では例えば $\Delta z \partial/\partial z$ の項がくっつきます。

偏微分と関係して全微分というのがあり、これは $x(u,v)$ とすると

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

として定義されています。これを微小量として見たのが

$$\Delta x = x(u + \Delta u, v + \Delta v) - x(u,v)$$

という表記での $\Delta u, \Delta v \to 0$ の極限です。全微分は変数を増やしていっても同様で

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial t_n} dt_n$$

となります。

偏微分を使う際に気をつけなければいけないのは、常微分での

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$$

という関係 (逆関数の微分は微分の逆数) を持っていないことです。これはおそらく 2,3 次元の直交座標から極座標への変換のときに出会うと思います。2 次元直交座標を (x,y)、2 次元極座標を (r,θ) とすれば、連鎖律から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

このときに例えば、$x = r\cos\theta$ から

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$$

を使って

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

とするのは間違いと注意されるはずです。理由は簡単で、偏微分は微分しない変数を固定して微分しろという意味なので、$\partial x(r,\theta)/\partial r$ で θ を固定して r 微分したものの逆数が $\partial r(x,y)/\partial x$ で y を固定して x 微分したものにならないからです。ちなみに、本当の形は

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}\ ,\ \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{1/2} = x(x^2+y^2)^{-1/2} = \frac{x}{r} = \cos\theta \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{1/2} = y(x^2+y^2)^{-1/2} = \frac{y}{r} = \sin\theta \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}\frac{d}{d(y/x)}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+y^2/x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{x}\frac{d}{d(y/x)}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+y^2/x^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned}$$

tan の逆関数 arctan の微分は

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

となっています。