弦に圧力をかけた場合

弦に圧力を加えた運動方程式を作り、その後にグリーン関数を使った微分方程式の解き方を扱います。ただし、一般性は考慮した話になっていないで、使い方の具体例です。
ここではディラックのデルタ関数が出てきますが、定義だけでどうにかなる程度でしか使いません。

状況設定は基本的に「弦の振動」と同じですが、そこに圧力を加えます。なので、例えば弦を指で持ち上げた時にどれだけ弦が元いた位置からズレるのかを求めます。注意として、圧力と力は違うものということに気をつけてください。力の次元は、質量 M、長さ L、時間 T とすれば

$$
\text{力} = \frac{ML}{T^2}
$$

対して、圧力は

$$
\text{圧力} = \frac{ML}{T^2 L} = \frac{M}{T^2}
$$

このような単位で、圧力は力/長さの単位を持ちます。大雑把に言ってしまえば、圧力に圧力がかかっている長さをかければ力になるということです。

圧力 $f(x)$ を加えた時の運動方程式を作ります。「弦の振動」と同じように、適当な弦の区間を取り、その区間に y 軸方向に圧力がかかっているとします。また、時間は無視します。

圧力がかかっている区間は x_1, x_2 の間とし、x_1, x_2 での弦の接線の水平方向からの角度は θ_1, θ_2 とします (弦の圧力での図と同じ状況)。ただし、圧力がかかっているために弦のどこも同じ張力と設定せずに、x_1, x_2 に作用している張力は T_1, T_2 と区別します。このとき、この区間の弦がつり合っているなら、y 軸方向に対して

$$
T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 + \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) = 0 \tag{1}
$$

となります（重力は無視)。最初に言ったように力は圧力に長さを掛けたものなので、区間の長さで積分しています。x_1 と x_2 の間を微小間隔 Δx で N 等分したとき、その中の点 x_i にかかっている圧力 $f(x_i)$ に微小な長さ Δx をかけたものがその微小区間の力なので、

$$
\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x
$$

として足し合わせれば区間全体の力になります。そして、$\Delta x \to 0$ の極限を取れば積分になり、第三項の形になります。

x 軸方向に対してのつり合いは

$$
T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1
$$

これを

$$
T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 = T
$$

とします。これで (1) をわれば

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) &= \frac{T_2\sin\theta_2}{T} - \frac{T_1\sin\theta_1}{T} \\
&= \frac{T_2\sin\theta_2}{T_2\cos\theta_2} - \frac{T_1\sin\theta_1}{T_1\cos\theta_1} \\
&= \tan\theta_2 - \tan\theta_1
\end{aligned}
$$

そして、ある地点 x での y 方向への変位を表わす関数を $u(x)$ とすれば (時間はある時間で固定されているとする)、弦の接線と水平方向の角度を ϕ は

$$\tan\phi = \frac{du}{dx}$$

となるので

$$\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=x_2} - \frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=x_1} = -\frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

ここから「$'$」を x の微分としていきます ($u' = du/dx$)。ここで x_2 と x_1 が微小区間 Δx だけ離れているとすれば、積分は $f(x_i)\Delta x$ に置き換えて

$$
\begin{aligned}
u'(x_1+\Delta x) - u'(x_1) &= -\frac{1}{T}f(x_1)\Delta x \\
\frac{u'(x_1+\Delta x) - u'(x_1)}{\Delta x} &= -\frac{1}{T}f(x_1) \\
u''(x_1) &= -\frac{1}{T}f(x_1) \\
\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_1} &= -\frac{1}{T}f(x_1) \\
-T\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

最後で x_1 でなく任意 x としています。これが圧力 $f(x)$ を加えた場合の運動方程式になります。境界条件として弦の両端は固定されているとすれば (弦の両端は $x=0, x=l$)

$$u(0)=0\ ,\ u(l)=0 \qquad (3)$$

(2) の方程式は、例えば圧力を定数 p とし、圧力がかかってる区間とかかっていない区間に分離してそれぞれの領域で考えてやれば解くことが出来ます。

実際に解くときは具体的な $f(x)$ を与えますが、$f(x)$ の形次第で解き方が変わります。これは面倒です。なので、$f(x)$ のまま解いていきます。

そのために最初に戻ります。まず、長さ l の弦を微小区間 Δx に N 分割します。そして、その i 番目の微小区間である x_i の地点にかかっている圧力が $f(x_i)$ とします。そうすると、その区間にかかっている力は $f(x_i)\Delta x$ です。この微小区間にかかる力によって、弦のある地点 x の変位が

$$G(x;x_i)f(x_i)\Delta x$$

として、$G(x;x_i)$ という今はまだ正体が分からない関数を絡ませて表現できるとします。$G(x;x_i)$ は x_i で起きた影響が別の地点 x でどのように影響するのかを媒介しています。G の変数を $(x;x_i)$ と書いているのはただの表記なので、「;」が気にいらなければ、普通に「,」を使っても問題はないです。そして、圧力がかかっている微小区間全てを足せば、全圧力による変位になるので、ある地点 x での変位 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} G(x; x_i) f(x_i) \Delta x$$

となり、微小区間 Δx のゼロの極限で

$$u(x) = \int_0^l dx_0 \ G(x; x_0) f(x_0) \tag{4}$$

$u(x)$ は運動方程式 (2) を満たし、境界条件 (3) も与えられているとします。

(4) の積分が出来れば $u(x)$ は求まるので、関数 $G(x; x_0)$ が何なのか分かればいいです。そのために、x で 2 回微分してみると

$$u''(x) = \int_0^l dx_0 \ G''(x; x_0) f(x_0)$$

G'' と表記していますが、x_0 を固定して x で微分しているので偏微分です。u'' は (2) を満たすので右辺は

$$\int_0^l dx_0 \ G''(x; x_0) f(x_0) = -\frac{1}{T} f(x) \tag{5}$$

を満たさなければいけません。

こんな関係を満たせる特別な関数が存在しています。それはディラックのデルタ関数 (delta function) と呼ばれるものです。ディラックのデルタ関数 $\delta(z)$ は

$$\int_a^b dz \ \delta(x - z) F(z) = F(z)$$

と定義されています。このとき、z の積分範囲内に x がいる必要があります。$\delta(z)$ は $z = 0$ のとき無限大、$z \neq 0$ のときゼロです。

デルタ関数によって、$G''(x; x_0)$ は

$$-\frac{1}{T} \frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) = \delta(x - x_0) \tag{6}$$

となっていれば (5) を満たします。x_0 は固定されているとして、常微分で書いています。というわけで、解くべき微分方程式はこれになります。また、(6) での境界条件は $u(x)$ と同じように

$$G(0; x_0) = 0 \ , \ G(l; x_0) = 0$$

とします。これは両端では弦が動かないので、両端では寄与しないというものです。実際に、これによって (4) は $u(x)$ の境界条件となります。

また、(2) と (6) を見比べてみると、(6) は x_0 にかかった力 1 によって x で起きた変位が $G(x, x_0)$ になると言えます。(6) の右辺はデルタ関数の定義から、x_0 を含むある区間で積分したら 1 になります。このため、力は圧力を積分したものなので、(6) の右辺は力が 1 と言えます。

G の微分方程式は、(2) での u が G に、$f(x)$ が $\delta(x - x_0)$ になっただけです。しかし、デルタ関数という特殊な関数が入ってきているために、扱いが変わります。

境界条件のもとで (6) を解きます。デルタ関数の性質のために、$0 \leq x < x_0$ と $x_0 < x \leq l$ の区間ではデルタ関数は 0 です。なので、それらの区間で

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) = 0 \tag{7}$$

を解いて、$x=x_0$ でそれぞれの領域での解が一致するとすればいいです。これは 2 回積分すればいいだけなので、それぞれの区間で $(A_1, A_2, B_1, B_2$ を任意定数として)

$$G_-(x;x_0) = A_1 x + A_2 \quad (0 \le x < x_0)$$

$$G_+(x;x_0) = B_1 x + B_2 \quad (x_0 < x \le l)$$

$G_\pm$ として区別しています。これに対して境界条件を入れると

$$G_-(0;x_0) = 0 = A_2\ ,\ G_+(l;x_0) = 0 = B_1 l + B_2$$

なので

$$G_-(x;x_0) = A_1 x \quad (0 \le x < x_0) \tag{8a}$$
$$G_+(x;x_0) = B_1 x - B_1 l \quad (x_0 < x \le l) \tag{8b}$$

と求まります。

このときの $x=x_0$ の地点を考えます。どちらの場合も x_0 に近づけていけば同じ値になるべきなので

$$G_-(x_0;x_0) = G_+(x_0;x_0)$$

G_- では x_0 に x 軸の左側から、G_+ では右側から近づけています。この条件によって

$$A_1 x_0 = B_1 x_0 - B_1 l$$
$$B_1 = \frac{A_1 x_0}{x_0 - l}$$

なので、(8a),(8b) は

$$G_-(x;x_0) = A_1 x \quad (0 \le x < x_0)$$
$$G_+(x;x_0) = \frac{A_1 x_0}{x_0 - l}(x-l) \quad (x_0 < x \le l)$$

A_1 も決定するなら、弦のつり合いを今の場合に合わせて (今は x_0 に力がかかる)

$$\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=x_2} - \frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=x_1} = -\frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x)$$
$$\Rightarrow \frac{dG_+(x;x_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} - \frac{dG_-(x;x_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{1}{T}\int_0^l dx_0\ \delta(x-x_0) = -\frac{1}{T} \tag{9}$$

としたものを使えばいいです。そうすると

$$
\begin{aligned}
\frac{A_1x_0}{x_0-l}-A_1=&-\frac{1}{T}\\
A_1=&-\frac{1}{T}(\frac{x_0}{x_0-l}-1)^{-1}\\
=&\frac{l-x_0}{lT}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
G_-(x;x_0)&=\frac{l-x_0}{lT}x \quad (0\leq x<x_0)\\
G_+(x;x_0)&=\frac{l-x}{lT}x_0 \quad (x_0<x\leq l)
\end{aligned}
$$

$x=x_0$ で一致します。また、x と x_0 を入れ替えても同じになっています。
このようにして $G(x;x_0)$ が求まってしまえば、$f(x)$ がどんな形をしていようと (4) から $u(x)$ を求めることが出来ます。例えば、$f(x)$ が定数のときすぐに $u(x)$ が求められます。
次にもう少しこの解き方で問題ないことを見ておきます。(6) を見てみると、右辺がデルタ関数なので、(7) で区間を分けたように、G' は $x=x_0$ で連続的になっていません。このことは、(2) との比較から、弦に x_0 の地点で力が加わるために、変化の仕方に飛びが出て連続的でなくなると言うことが出来ます。
しかし、(4) での $f(x)$ はどこでも連続的と出来ます。そうすると、G' が連続的でない関数 G と連続的な関数 f の積の積分 (4) から、$u(x)$ の運動方程式 (2) がちゃんと出てくるのかと思えます。このことを確かめます。
(4) を単純に微分して (2) からの比較でデルタ関数ならいいとし、G の方程式を作りましたが、今度は求められた G の性質を使って (4) から (2) の方程式を導きます (ようは逆手順です)。使う性質は G は (6) の解で連続的、G' は連続的でないというものです。
(4) を x で微分すると

$$
\frac{du(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^l dx_0G(x;x_0)f(x_0)
$$

このとき、$x_0=x$ で関数 G の微分は連続的でないので、x_0 の積分範囲を x で分断し

$$
\frac{du(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\int_0^{x_-} dx_0\ G(x;x_0)f(x_0)+\int_{x_+}^l dx_0\ G(x;x_0)f(x_0))
$$

$x_\pm=x\pm\epsilon$ として、ϵ のゼロの極限で x になるとしています。そうすると、積分は

$$
\frac{d}{dx}\int_a^x dz\ f(x,z)=f(x,x)+\int_a^x dz\frac{\partial}{\partial x}f(x,z)
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^{x-\epsilon} dx_0\ G(x;x_0)f(x_0)&=G(x;x_-)f(x_-)+\int_0^{x-\epsilon} dx_0\ \frac{\partial}{\partial x}G(x;x_0)f(x_0)\\
\frac{d}{dx}\int_{x+\epsilon}^l dx_0\ G(x;x_0)f(x_0)&=-G(x;x_+)f(x_+)+\int_{x+\epsilon}^l dx_0\ \frac{\partial}{\partial x}G(x;x_+)f(x_+)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\frac{du(x)}{dx} = \int_0^{x_-} dx_0 \frac{\partial G(x;x_0)}{\partial x} f(x_0) + \int_{x_+}^l dx_0 \frac{\partial G(x;x_0)}{\partial x} f(x_0) + G(x;x_-)f(x_-) - G(x;x_+)f(x_+) \tag{10}$$

G, f は x でも連続なので、$G(x;x_-)f(x_-) = G(x;x_+)f(x_+)$ と出来ます。よって

$$\frac{du(x)}{dx} = \int_0^{x_-} dx_0 \frac{dG(x;x_0)}{dx} f(x_0) + \int_{x_+}^l dx_0 \frac{dG(x;x_0)}{dx} f(x_0)$$

これをもう 1 回 x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = & \int_0^{x_-} dx_0 \frac{\partial^2 G(x;x_0)}{\partial x^2} f(x_0) + \int_{x_+}^l dx_0 \frac{\partial^2 G(x;x_0)}{\partial x^2} f(x_0) \\ & + \frac{\partial G(x;x_-)}{\partial x} f(x_-) - \frac{\partial G(x;x_+)}{\partial x} f(x_+)\end{aligned}$$

第一項、第二項では積分範囲を連続でなくなる地点を含まないようにしていためにに、(6) より G の 2 階微分は 0 となります。残った二項は G の微分は連続的でないために

$$\frac{\partial G(x;x_-)}{\partial x} f(x_-) = \frac{\partial G(x;x_+)}{\partial x} f(x_+)$$

とはなりません。しかし、つりあいの条件 (9) より（今は偏微分で書いているので偏微分に変えて）

$$\frac{\partial G(x;x_-)}{\partial x} - \frac{\partial G(x;x_+)}{\partial x} = -\frac{1}{T}$$

という関係を持っており、f は連続なので

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{\partial G(x;x_-)}{\partial x} f(x_-) - \frac{\partial G(x;x_+)}{\partial x} f(x_+) = -\frac{1}{T} f(x)$$

となり、$u(x)$ の運動方程式になります。というわけで、u は

$$u(x) = \int_0^l G(x;x_0) f(x_0) dx_0$$

という形で書けることが確かめられました。

最後にまとめておきます。ここで導入された $G(x;x_0)$ はグリーン関数 (Green function) と呼ばれます。式の構造から分かりやすい解釈として (上の方でも言ったように)、ある地点 x_0 で起きたことがグリーン関数 $G(x;x_0)$ を介して地点 x に影響を与えるというものです。

グリーン関数 $G(x;x_0)$ は

$$-\frac{1}{T} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x) \tag{11}$$

に対して、u を 0 から l の区間で

$$u(x) = \int_0^l dz\ G(x;z) f(z) \tag{12}$$

としたとき

$$-\frac{1}{T}\frac{d^2}{dx^2}G(x;z)=\delta(x-z) \tag{13}$$

という微分方程式に従うとして与えられます。グリーン関数は G は積分の区間に渡って連続、dG/dx は $x=z$ で連続でないという性質を持ち

$$\frac{\partial G(x;z)}{\partial x}\Big|_{x=z+\epsilon}-\frac{\partial G(x;z)}{\partial x}\Big|_{x=z-\epsilon}=-\frac{1}{T} \tag{14}$$

となっています。また、$G(x;y)$ は

$$G(x;y)=G(y;x)$$

という対称性を持ちます。

(12) は G に対する境界条件によって u の境界条件も満たしています。今の場合では、境界上では $G=0$ というものです (一般的には他の境界条件でもいい)。

このように (11) の形をした方程式に対して、(12),(13),(14) と境界条件を満たす関数がグリーン関数と定義されます。グリーン関数を使えば、形式的には微分方程式が解けたことになります。

ちなみに、今見てきたような u が両端で 0 になるといった境界条件でなく何か値を持つ時や、u の方程式が非同次方程式になっているときには (11) にさらにもう一項くっつきます。