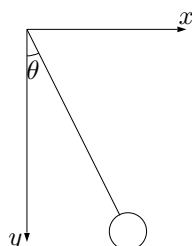


単振り子・2重振り子

単振動の別の例として単振り子を見ます。ついでに振り子が連結している2重振り子も扱います。2重振り子では微分方程式による連立方程式になるので、かなり面倒な計算を行います。



質量 m の重りがついた振り子の運動方程式を位置 $(x(t), y(t))$ に対して作ります。なので、上の図での x 軸方向と y 軸方向に対する方程式として

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \sin \theta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - T \cos \theta$$

y 座標は下向きを正に取っています (座標の方向のどちらを正に取っているかは本によって違うので気をつけてください)。 T は張力、 g は重力です。これを解きますが、 θ が大きい時は複雑になるので小さいとします。

θ が小さければ、 $\sin \theta, \cos \theta$ の近似として ($\theta \ll 1$)

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1$$

が使えます。ひもの長さを l とすれば、これらの近似から

$$x = l \sin \theta \simeq l \theta, \quad y = l \cos \theta \simeq l$$

これを使って置き換えれば運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \theta$$
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = T - mg$$

しかし、 $y \simeq l$ と近似しているので、 y に対する運動方程式の左辺はゼロです。なので、 $T = mg$ となります。そうすると、 x に対する運動方程式の右辺は

$$-T \theta = -\frac{T}{l} x = -m \frac{g}{l} x$$

となり、 x の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{l} x$$

これは単振動の式と同形です。というわけで、 y 軸からの角度が十分小さい範囲において、単振り子は単振動と同じ微分方程式に従います。同じ微分方程式なので一般解も同じ形になって

$$x(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$$

となります。

また、角度 θ の方程式とすることもできます。 y 軸からの重りの位置までの円弧の長さは $l\theta$ で与えられ、 θ は時間 t に依存しています。そして、 θ が十分小さければ、円弧は直線と見なせるので

$$x = l\theta$$

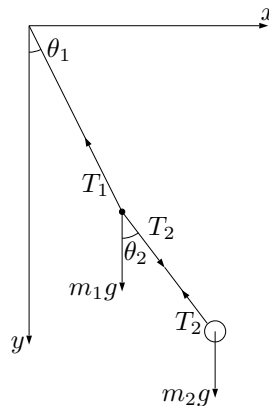
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

から、 θ が十分小さいとき

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{T}{lm} \theta = -\frac{g}{l} \theta$$

という角度 θ に対する方程式になります。

今度は 2 重振り子を見ていきます。2 重振り子は



となっているもので、1 つの単振り子の先にもう 1 つ単振り子をつけたものです。 θ_2 での黒点は重りです。この計算はかなり面倒になります。

それぞれの質点についての運動方程式を x 座標と y 座標にわけて作っていきます。質量 m_1 の重りの位置を $(x_1(t), y_1(t))$ 、質量 m_2 の重りの位置を $(x_2(t), y_2(t))$ とし、質量 m_1 の重りがついているひもの長さは l_1 、そこさきについているひもの長さは l_2 とします。そうすると、図に示している力の作用の仕方から、 x_1, y_1 の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -T_1 \frac{x_1}{l_1} + T_2 \frac{x_2 - x_1}{l_2}$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -T_1 \frac{y_1}{l_1} + T_2 \frac{y_2 - y_1}{l_2} + m_1 g$$

角度で書くなら

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 - x_1 = l_2 \sin \theta_2, \quad y_2 - y_1 = l_2 \cos \theta_2$$

を使えばいいです。同様に、 x_2, y_2 に対しては

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -T_2 \frac{x_2 - x_1}{l_2}$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -T_2 \frac{y_2 - y_1}{l_2} + m_2 g$$

単振り子と同じように角度が十分小さいと近似します。 θ_1 と θ_2 を十分小さいとすることで

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \simeq l_1 \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1 \simeq l_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \simeq l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \simeq l_1 + l_2$$

この近似を x_1, y_1, x_2, y_2 の運動方程式に入れれば

$$m_1 l_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -T_1 \theta_1 + T_2 \theta_2 \quad (1a)$$

$$0 = -T_1 + T_2 + m_1 g \quad (1b)$$

$$m_2 (l_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + l_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2}) = -T_2 \theta_2 \quad (1c)$$

$$0 = T_2 + m_2 g \quad (1d)$$

(1b),(1d) から

$$T_2 = m_2 g, \quad T_1 = g(m_1 + m_2)$$

なので、(1a) は

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1} g \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 l_1} g \theta_2$$

(1b) は

$$\begin{aligned}
m_2(l_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2}) &= -m_2 g \theta_2 \\
m_2 l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -m_2 l_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - m_2 g \theta_2 \\
\frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 l_1} g \theta_1 - \frac{m_2}{m_1 l_1} g \theta_2 \right) - \frac{1}{l_2} g \theta_2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_2
\end{aligned}$$

よって、解くべき微分方程式は

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1} g \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 l_1} g \theta_2 \quad (2a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_2 \quad (2b)$$

となり、微分方程式による連立方程式です。この一般解を求めます。

まず、少しひねった変形をします。 θ_1, θ_2 を

$$\theta_1 = a\chi_1, \quad \theta_2 = b\chi_2 \quad (3)$$

と置き換えます。 a, b は任意の定数とします。(2a),(2b) にそれぞれ入れれば

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\chi_1}{dt^2} &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1} g \chi_1 + \frac{m_2}{m_1 l_1} g \frac{b}{a} \chi_2 \\
\frac{d^2\chi_2}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \frac{a}{b} \chi_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \chi_2
\end{aligned}$$

ここで、 a/b を含んでいる χ_1 の右辺第二項と、 χ_2 の右辺第一項の部分が等しくなるように、 a, b を決めます。なので

$$\begin{aligned}
\frac{m_2}{m_1 l_1} \frac{b}{a} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} \frac{a}{b} \\
\frac{m_2}{m_1 l_1} b^2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} a^2
\end{aligned}$$

から

$$a = \sqrt{\frac{m_2}{m_1 l_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2}} \quad (4)$$

とします。これらを入れて

$$\begin{aligned}\frac{d^2\chi_1}{dt^2} &= -\frac{m_1+m_2}{m_1l_1}g\chi_1 + \frac{m_2}{m_1l_1}\sqrt{\frac{m_1l_1(m_1+m_2)}{m_1m_2l_2}}g\chi_2 = -\frac{m_1+m_2}{m_1l_1}g\chi_1 + \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2l_1l_2}}g\chi_2 \\ \frac{d^2\chi_2}{dt^2} &= \frac{m_1+m_2}{m_1l_2}\sqrt{\frac{m_1m_2l_2}{m_1l_1(m_1+m_2)}}g\chi_1 - \frac{m_1+m_2}{m_1l_2}g\chi_2 = \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2l_1l_2}}g\chi_1 - \frac{m_1+m_2}{m_1l_2}g\chi_2\end{aligned}$$

見やすくするために

$$u^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1l_1}g, \quad \nu^2 = \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2l_1l_2}}g, \quad \gamma^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1l_2}g \quad (5)$$

として

$$\frac{d^2\chi_1}{dt^2} = -u^2\chi_1 + \nu^2\chi_2 \quad (6a)$$

$$\frac{d^2\chi_2}{dt^2} = \nu^2\chi_1 - \gamma^2\chi_2 \quad (6b)$$

これらから χ_1, χ_2 の一般解を求めて、(3),(4) によって θ_1, θ_2 に戻せば (2a),(2b) の一般解となります。
式の形としては、単振動に近いので、解の形をそれぞれ

$$\chi_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \alpha), \quad \chi_2(t) = C_2 \cos(\omega t + \alpha)$$

と仮定します。単振動と同じに考えれば、 C_1, C_2, α は任意定数になるはずなので、求めたいのは ω です。 $\cos(\omega t + \alpha)$ を共通にしているのは、(6a),(6b) の形からこうすれば上手くいきそうだからです。

そうすると、(6a) は

$$\begin{aligned}-C_1\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) &= -u^2C_1 \cos(\omega t + \alpha) + \nu^2C_2 \cos(\omega t + \alpha) \\ -C_1\omega^2 &= -u^2C_1 + \nu^2C_2 \\ (u^2 - \omega^2)C_1 - \nu^2C_2 &= 0\end{aligned}$$

同様に (6b) では

$$\begin{aligned}-C_2\omega^2 &= \nu^2C_1 - \gamma^2C_2 \\ -\nu^2C_1 + (\gamma^2 - \omega^2)C_2 &= 0\end{aligned}$$

これらは

$$\begin{aligned}(u^2 - \omega^2)C_1 - \nu^2C_2 &= 0 \\ -\nu^2C_1 + (\gamma^2 - \omega^2)C_2 &= 0\end{aligned} \quad (7)$$

という C_1, C_2 に対する連立方程式なので、連立方程式の解が存在するためには行列式として

$$\begin{vmatrix} u^2 - \omega^2 & -\nu^2 \\ -\nu^2 & \gamma^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する必要があります。よって

$$\begin{aligned} 0 &= (u^2 - \omega^2)(\gamma^2 - \omega^2) - \nu^4 \\ &= \omega^4 - (u^2 + \gamma^2)\omega^2 + u^2\gamma^2 - \nu^4 \end{aligned}$$

ω^2 は解の公式から

$$\omega^2 = \frac{(u^2 + \gamma^2) \pm \sqrt{(u^2 + \gamma^2)^2 - 4(u^2\gamma^2 - \nu^4)}}{2} = \frac{(u^2 + \gamma^2) \pm \sqrt{(u^2 - \gamma^2)^2 + 4\nu^4}}{2}$$

面倒なので示しませんが、マイナスのときでも $\omega^2 > 0$ になっています ((5) を入れれば確かめられる)。これで ω が求まったので、(7) に入れれば C_1, C_2 の関係が分かります。 $\pm$ に対応して ω^2 を

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{u^2 + \gamma^2 \pm \sqrt{(u^2 - \gamma^2)^2 + 4\nu^4}}{2}$$

とします。 $\omega^2 = \omega_+^2$ を (7) に入れて

$$\begin{aligned} -C_1\omega_+^2 &= -u^2C_1 + \nu^2C_2 \\ C_2 &= \frac{u^2 - \omega_+^2}{\nu^2}C_1 \end{aligned}$$

となるので、 χ_1, χ_2 は

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= C_1 \cos(\omega_+ t + \alpha_+) \\ \chi_2(t) &= \frac{u^2 - \omega_+^2}{\nu^2} C_1 \cos(\omega_+ t + \alpha_+) \end{aligned}$$

$\omega^2 = \omega_-^2$ としても ω_+ が ω_- になるだけなので、区別のために α_+ を α_- に変えて

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= C_1 \cos(\omega_- t + \alpha_-) \\ \chi_2(t) &= \frac{u^2 - \omega_-^2}{\nu^2} C_1 \cos(\omega_- t + \alpha_-) \end{aligned}$$

今は 2 階微分方程式の連立方程式になるので、一般解での任意定数は全部で 4 個あります。そうすると、それぞれの場合を足せばいいことになり、 χ_1, χ_2 の一般解は

$$\chi_1(t) = A \cos(\omega_+ t + \alpha_+) + B \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$

$$\chi_2(t) = \frac{u^2 - \omega_+^2}{\nu^2} A \cos(\omega_+ t + \alpha_+) + \frac{u^2 - \omega_-^2}{\nu^2} B \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$

となります。 A, B, α_+, α_- は任意定数です。後は θ_1, θ_2 に戻せばいいだけです。