実験室系と重心系

散乱の問題で出てくる実験室系と重心系を簡単に見ます。

重心の関係から見ていきます。2 つの質点 A_1, A_2 があるとします。それぞれの運動方程式は、A_1, A_2 の質量を m_1, m_2、位置を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$、作用してる力を $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ として

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 \ , \ m_2\frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2$$

これらを足すと

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

左辺は

$$M = m_1 + m_2 \ , \ \boldsymbol{x}_g = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}$$

と置き換えることで

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{dt^2} = (m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_1\boldsymbol{x}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}) = M\frac{d^2\boldsymbol{x}_g}{dt^2}$$

となり

$$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_g}{dt^2} = \boldsymbol{F} \qquad (\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)$$

$\boldsymbol{x}_g$ は力 $\boldsymbol{F}$ が作用する質量 M の質点の運動方程式に従い、A_1, A_2 の重心 (center of mass) と呼ばれます。$\boldsymbol{F} = 0$ のとき

$$M\frac{d\boldsymbol{x}_g}{dt} = C$$

として、定数 C になります。このため

$$\boldsymbol{p}_c = M\frac{d\boldsymbol{x}_g}{dt} = (m_1+m_2)\frac{d}{dt}(\frac{m_1\boldsymbol{x}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2}) = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}, \ i = 1, 2)$$

となるので、$\boldsymbol{F} = 0$ のとき A_1, A_2 による全運動量 $\boldsymbol{p}_c$ は保存量になります。

重心は N 個あるときでは

$$\boldsymbol{x}_g = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{x}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i$$

と定義されます。ちなみに、この重心は質量が連続分布していない粒子として区別できる場合の定義で、質量が質量密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ で連続分布している物体の重心の位置は

$$\boldsymbol{x}_g = \frac{\int_V dV\ \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})}{\int_V dV\ \rho(\boldsymbol{x})} = \frac{\int_V dV\ \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})}{M} \qquad (dV = d^3x)$$

と定義されます。V は物体の体積です。ようは区別できる場合での和を、連続極限として積分にしただけです。これの例は下の補足で示しています。

換算質量 (reduced mass) を定義します。重心 $\boldsymbol{x}_g$ から A_1, A_2 へのベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすれば

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_g\ ,\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_g$$

変形すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_1}{M} - \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{M} = \frac{m_2}{M}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\
\boldsymbol{r}_2 &= -\frac{m_1}{M}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)
\end{aligned}$$

A_1 と A_2 の間のベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ による運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} &= \frac{m_2}{M}(\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{dt^2}) = \frac{1}{M}(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2) \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} &= -\frac{m_1}{M}(\frac{d^2\boldsymbol{x}_1}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{x}_2}{dt^2}) = -\frac{1}{M}(\boldsymbol{F}_1 - \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{F}_2)
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
M(\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}) &= \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_1 - \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{F}_2 \\
M\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1}\boldsymbol{F}_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_2}\boldsymbol{F}_2 \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{1}{m_1}\boldsymbol{F}_1 - \frac{1}{m_2}\boldsymbol{F}_2 \\
\frac{m_1m_2}{M}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{1}{M}(m_2\boldsymbol{F}_1 - m_1\boldsymbol{F}_2)
\end{aligned}$$

このときの

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

を換算質量と呼びます (数学での調和平均の 1/2)。式が複雑になっただけに見えますが、A_1, A_2 に作用している力に、A_2 から A_1 に作用する力 $\boldsymbol{f}_{12}$ と A_1 から A_2 に作用する力 $\boldsymbol{f}_{21}$ が含まれており、$\boldsymbol{f}_{12} = -\boldsymbol{f}_{21}$ なら

$$\frac{1}{M}(m_2\boldsymbol{f}_{12} + m_1\boldsymbol{f}_{12}) + \frac{1}{M}(m_2\boldsymbol{F}_1 - m_1\boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{f}_{12} + \frac{1}{M}(m_2\boldsymbol{F}_1 - m_1\boldsymbol{F}_2)$$

となり、A_1, A_2 間の力が分離した形になります。このため、$\boldsymbol{f}_{12}$ のみなら

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}_{12}$$

として、1 つの質点の運動方程式の形になります。

$\boldsymbol{r}_i$ による関係を求めます。質点の位置と質量の積の和は

$$m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 = m_1(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{x}_g) + m_2(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{x}_g) = M\boldsymbol{x}_g + m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2$$

$M\boldsymbol{x}_g$ は

$$M\boldsymbol{x}_g = (m_1 + m_2)\boldsymbol{x}_g = (m_1 + m_2)\frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2} = m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \tag{1}$$

なので、重心からの位置は

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$$

この性質は一般的なもので、N 個ある場合では

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i = 0$$

となります。

$\boldsymbol{r}_i$ の時間微分は

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt} - \frac{d\boldsymbol{x}_g}{dt} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_g$$

質点の速度と重心の速度の差なので、$\boldsymbol{u}_i$ は重心に対する質点の相対速度です。これを使って A_1, A_2 の運動エネルギーの和

$$T = \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{v}_2|^2$$

を書き換えると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_g)^2 + \frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_g)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(|\boldsymbol{u}_1|^2 + |\boldsymbol{v}_g|^2 + 2\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_g) + \frac{1}{2}m_2(|\boldsymbol{u}_2|^2 + |\boldsymbol{v}_g|^2 + 2\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_g) \\
&= \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{u}_2|^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\boldsymbol{v}_g|^2 + (m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{v}_g \\
&= \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{u}_2|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

相対速度による運動エネルギーと、全質量による重心の運動エネルギーの和になります。換算質量で書くこともできます。$\boldsymbol{u}_1$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_g = \boldsymbol{v}_1 - \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} &= \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \\
&= \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{v}_r \qquad (\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)
\end{aligned}$$

同様に、$\boldsymbol{u}_2$ は

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{v}_r$$

とできるので、運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{u}_2|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2 &= \frac{1}{2}(m_1\frac{\mu^2}{m_1^2} + m_2\frac{\mu^2}{m_2^2})|\boldsymbol{v}_r|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\mu^2|\boldsymbol{v}_r|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{v}_r|^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2
\end{aligned}$$

質量 μ、速度 $\boldsymbol{v}_r$ の質点と質量 M、速度 $\boldsymbol{v}_g$ の質点の運動エネルギーの和の形になります。

角運動量も同様に変形できます。2 つの質点の角運動量の和は

$$\boldsymbol{L} = m_1(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{v}_1) + m_2(\boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{v}_2)$$

これを重心に対する位置 $\boldsymbol{r}_i$ と相対速度 $\boldsymbol{u}_i$ に置き換えると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= m_1(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{x}_g) \times (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_g) + m_2(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_g) \times (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_g) \\
&= m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{u}_1) + m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_g) + m_1(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{u}_1) + m_1(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g) \\
&\quad + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{u}_2) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_g) + m_2(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{u}_2) + m_2(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g) \\
&= m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{u}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{u}_2) + (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{v}_g \\
&\quad + \boldsymbol{r}_g \times (m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2) + (m_1 + m_2)(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g) \\
&= m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{u}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{u}_2) + M(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g)
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項は重心の位置を基準にした角運動量、第 3 項は重心の角運動量です。

運動エネルギーと角運動量は N 個の質点にそのまま一般化でき、運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{v}_g)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{u}_i^2 + \boldsymbol{v}_g^2 + 2\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_g) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{u}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_g^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_g) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{u}_i^2 + \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_g^2
\end{aligned}$$

角運動量は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{x}_g) \times (\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{v}_g) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_g) + \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{u}_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i) + \sum_{i=1}^{N}(m_i\boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{v}_g + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_g \times (m_i\boldsymbol{u}_i) + M(\boldsymbol{x}_g \times \boldsymbol{v}_g) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i) + M(\boldsymbol{r}_g \times \boldsymbol{v}_g)
\end{aligned}$$

となります。

実験室系 (laboratory frame) と重心系 (center of mass frame) の話に移ります。実験室系は、実験との対応を取っている座標なので実験室系と言い、実験の観測者を基準にした座標系です。ようは観測者側の都合による座標系なので、扱いやすいように設定した方がいいだろうということで、ほとんどの場合で実験室系と言ったときは物体をぶつける標的が静止しているように取ります。

重心系は重心の位置を基準とする座標系です (重心と一緒に動く座標系)。つまり、重心が原点です。重心系を取ると状況が簡単になります。

重心の関係によって、実験室系と重心系の関係が与えられます。実験室系での位置、速度は小文字、重心系では大文字で書くことにします。A_2 が静止している実験室系とし、全運動量は保存しているとします (後で触れるように散乱の問題では保存すると設定するため)。全運動量 $\boldsymbol{p}_c$ は、A_2 が静止しているので

$$\boldsymbol{p}_c = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1$$

重心の位置は

$$\boldsymbol{x}_g = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2} \quad (\boldsymbol{x}_2 = 0)$$

重心の速度は

$$\boldsymbol{v}_g = \frac{d\boldsymbol{x}_g}{dt} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{\boldsymbol{p}_c}{M}$$

今は $\boldsymbol{p}_c$ は定数なので、重心を原点とする重心系は実験室系に対して一定速度 $\boldsymbol{v}_g$ で動いている座標系です。このため、ある点の位置が重心系では $\boldsymbol{X}$、実験室系では $\boldsymbol{x}$ なら

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{v}_g t$$

このように、実験室系と重心系はガリレイ変換で繋がっています。時間微分すれば

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_g \quad (\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt})$$

$\boldsymbol{v}_g$ は重心の速度なので、重心系での速度 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_g$ は実験室系では重心に対する相対速度です。

重心系での 2 つの質点の位置 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ とその速度 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{v}_g t \ , \ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{v}_g t$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{v}_g \ , \ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{v}_g$$

$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ は実験室系では重心からの位置なので (上での $\boldsymbol{r}_i$)、実験室系の全運動量は

$$m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 = m_1(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{x}_g) + m_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{x}_g) = M\boldsymbol{x}_g + m_1\boldsymbol{X}_1 + m_2\boldsymbol{X}_2$$

$M\boldsymbol{x}_g$ は

$$M\boldsymbol{x}_g = (m_1+m_2)\boldsymbol{x}_g = (m_1+m_2)\frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1+m_2} = m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2$$

なので

$$m_1\boldsymbol{X}_1 + m_2\boldsymbol{X}_2 = 0$$

時間微分すれば

$$m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = 0$$

これは重心系での運動量の和なので、重心系での全運動量は 0 です (実験室系での相対速度による運動量の和は 0)。このことから、重心系は全運動量が 0 となる座標系と定義されることが多いです。全運動量が保存している散乱で重心系を選ぶと、散乱の前後で全運動量が 0 になるので、状況がかなり簡単になります。

実験室系の運動エネルギーは

$$T_L = \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{v}_1|^2 = \frac{|\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{c}}|^2}{2m_1} \qquad (\boldsymbol{p}_c = \boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1)$$

重心系での運動エネルギーは

$$T_{\mathrm{com}} = \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{V}_1|^2 + \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{V}_2|^2$$

(1),(2) から、これらは

$$\begin{aligned}
T_L &= \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{V}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{V}_2^2 + \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_g|^2 \\
&= T_{\mathrm{com}} + \frac{|\boldsymbol{p}_c|^2}{2M} \\
\frac{|\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{c}}|^2}{2m_1} - \frac{|\boldsymbol{p}_c|^2}{2M} &= T_{\mathrm{com}} \\
\frac{|\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{c}}|^2}{2m_1} &= T_{\mathrm{com}}(1-\frac{m_1}{M})^{-1} \\
T_L &= \frac{m_1+m_2}{m_2}T_{\mathrm{com}}
\end{aligned}$$

この関係から、例えば m_1 が m_2 に比べて十分小さければ $T_L \simeq T_{\rm com}$ と近似できます。

散乱の問題で使われる設定に触れておきます。最初は 2 つの質点 A_1, A_2 に力は作用してなく (もしくは力の和が 0)、重心の式を

$$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_g}{dt^2} = 0$$

として、全運動量は保存しているとします。その後、A_1, A_2 は近づいて散乱し、お互いに離れていきます。このとき、散乱後の A_1, A_2 の全運動量 $\boldsymbol{p}'_c$ は $\boldsymbol{p}_c = \boldsymbol{p}'_c$ になるとして

$$\boldsymbol{p}_c = M\frac{d\boldsymbol{x}_g}{dt} = \boldsymbol{p}'_c$$

が成立しているとします。つまり、散乱時に全運動量は増減せず、A_1, A_2 間での運動量のやり取りだけが行われるとします。全運動量が散乱の前後で保存するため、実験室系での全運動量を $\boldsymbol{p}_c$、散乱後の運動量 $\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ とすれば

$$\boldsymbol{p_c} = \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2$$

これに対して、重心系での散乱前の運動量 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ と散乱後の運動量 $\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2$ は

$$\boldsymbol{P}_c = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}'_1 + \boldsymbol{P}'_2 = 0$$

となるので、扱いが簡単になります。

さらに、運動エネルギーも保存されているとして

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}'_1|^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}'_2|^2$$

このように、運動量と運動エネルギーが保存される散乱は弾性散乱 (elastic scattering) と呼ばれます。ただし、弾性散乱を別の言い方で定義していることもあります。例えば、運動量でなく質量が変化しないとするときもあります。

散乱の前後でぶつける物体と標的の相対速度が変わらないとき、完全弾性散乱と呼ばれます。このとき、標的が静止している実験室系では、散乱の前後で速度が変わらないために、散乱角を求めるのは非常に簡単です。標的に当てる角度を指定すれば、後は角度の計算をするだけです (壁に斜めに球体をぶつけたのと同じ動きをする)。実際には、標的も散乱後に動くようにするので、ここまで単純な場合はほとんどないです。

実験室系で求めた散乱断面積 σ_L は、実験室系での立体角 $d\Omega_L$ の方向に重心系でも散乱しているとすれば

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L}\Big|_{\theta,\phi}d\Omega_L = \frac{d\sigma_{\rm com}}{d\Omega_{\rm com}}\Big|_{\Theta,\Phi}d\Omega_{\rm com}$$

com は重心系での量を表します。$\theta, \phi, \Theta, \Phi$ はそれぞれの極座標の角度です。角度の関係は簡単に分かります。実験室系での速度 $\boldsymbol{v}$ と重心系での速度 $\boldsymbol{V}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_g$$

$\boldsymbol{v}_g$ の方向を z 軸に取れば

$$|\boldsymbol{v}|\cos\theta = |\boldsymbol{V}|\cos\Theta + |\boldsymbol{v}_g|\ ,\ \ |\boldsymbol{v}|\sin\theta = |\boldsymbol{V}|\sin\Theta$$

θ, Θ は z 軸と $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$ の間の角度です。$\boldsymbol{v}_g = (0, 0, v_g)$ なので、xy 平面上の角度は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$ で同じです。これらから

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|\boldsymbol{V}|\sin\Theta}{|\boldsymbol{V}|\cos\Theta + |\boldsymbol{v}_g|}$$

として、角度の関係が与えられます。

・補足

重心を求める例として円錐を使ってみます。円錐の底面の円の半径は a とし、高さを h とします。円錐の重心はその形から明らかに、$x = 0, y = 0$ の z 軸上にいるはずなので、z 成分だけを考えます。質量密度を ρ として位置に依存していないとすれば、円錐の体積は $\pi a^2 h/3$ なので

$$z_g = \frac{\int_V dV\ z\rho}{\int_V dV\ \rho} = \frac{\int_V dV\ z}{\int_V dV} = \frac{\int_V dV\ z}{\pi a^2 h/3}$$

分子は円筒座標 (r, ϕ, z) を使うと

$$\int_V dV\ z = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{h(1-r/a)} dz\ rz$$

z の積分範囲は、円錐の高さは底面の円の半径 a とある高さでの円の半径 r の割合に対応することから (直角三角形だから)、このようになっています (上限を h とすると円柱になる)。積分を実行すると

$$\begin{aligned}
\int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{h(1-r/a)} dz\ rz &= 2\pi \int_0^a dr \frac{1}{2} r h^2 (1 - \frac{r}{a})^2 \\
&= \pi h^2 \int_0^a dr (r + \frac{r^3}{a^2} - \frac{2r^2}{a}) \\
&= \pi h^2 (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4a^2}a^4 - \frac{2}{3a}a^3) \\
&= \frac{\pi h^2}{12} a^2
\end{aligned}$$

よって、円錐の重心は

$$z_g = \frac{\pi a^2 h^2}{12} \frac{3}{\pi a^2 h} = \frac{h}{4}$$