

運動の法則

ニュートンの運動の法則を簡単に示します。ニュートンの運動の法則に従う力学は自然現象を説明することに最も成功した数理モデルの1つです。

ベクトルと微積分については知っているとしています。

ほとんどが1次元で関係を求めて、3次元はそれの一般化として結果だけ載せています。

力学は物体の運動を調べる分野です。ここでは物体と言ったときは、質量と空間上の位置が決まってい余計な内部構造がないとします(空間上の1点として扱われる)。このように設定したものは質点 (mass point) と呼ばれ、簡単に言えば物体を大きさを持たない点として扱うということです。力学はニュートンの発想をもとにしていますが、現代の形にしたのはオイラー (Euler) です。プリンキピアの記述は幾何学的なもので、現代の力学の視点とは大きく異なっています。

運動学 (kinematics) と動力学 (dynamics) という言葉があり、運動学は物体の運動を調べるもの、動力学は運動の原因となるものを調べるものです。しかし、力学でこの2つを区別することはほぼないので無視します。

力学には使用できる制限があり、ミクロな領域と光速に近い領域で使えなくなります。それぞれの領域は量子論と相対性理論の範疇です。また、銀河回転においてズレが出てくるとい話もありますが、これは力学に修正が必要なのか(修正ニュートン力学)、別の要因(暗黒物質)によるものなのかははっきりしていません。修正と言っても宇宙論のスケールで有効になる程度のもので通常の力学には影響しません。

座標系と系が何を指すのかに触れておきます。座標系は、対象を扱うために原点と座標軸(単位ベクトル)を設定したものです。例えば、地球を原点とするデカルト座標、太陽を原点としたデカルト座標です。

系は、扱う物理的な状況のことです。例えば、地球があり、そこに物体が落下している系、棒が回転している系、2つの粒子が回転している系とかです。ある系と言ったときは、物理として扱える何かしらの状況(考えてる理論が適用できる状況)を指します。

ちなみに、力学には前提として

- 全ての座標系において時間は同じ(絶対時間)
- 絶対的に静止している座標系がある(絶対空間)

というものがあります。絶対空間は、下で出てくる第一法則の言葉で言えば、力を受けていない物体は絶対空間に対して直線運動していると表現されます。これらは力学においては表面的には気にする必要がないものです。しかし、相対性理論に行くとこれらは変更されるので一応触れておきました。また、絶対空間への批判はニュートンの時代からあり、19世紀になって明確に主張したのがマッハ (Mach) です(マッハの原理)。

位置、速度、加速度、運動量を定義します。

- 位置

位置は運動している物体がどこにいるかを表し、連続的な時間の関数で書けるとします。連続的にするのは物体の運動は時間に対して連続的になっているはずだからです。なので、位置は3次元ベクトルの関数 $x(t)$ として書かれます。現実の運動を表す $x(t)$ は物体の軌道 (trajectory) と呼ばれます。

表記上の注意ですが、位置 $x = x(t)$ と書きますが、同じ x を使いたくなければ $x = f(t)$ とすればいいです。

- 速度

まず1次元とします。速度 v は時間の瞬間において定義されていて、時間 t_2 での位置を $x(t_2)$ 、時間 t_1 での位置を $x(t_1)$ とすれば

$$v = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{T} \quad (T = t_2 - t_1, \ t_1 < t_2)$$

となり、瞬間的な速度とも呼ばれます。これは平均速度

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{T}$$

での時間間隔 0 の極限です ($T \rightarrow 0$)。

速度 v の定義は

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \quad (\Delta t = T = t_2 - t_1)$$

と書き換えられ、これは明らかに微分の定義そのものなので、 $x(t)$ の微分によって、時間 t での速度は

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

つまり、速度は位置の微分で、時間変化による位置の差の時間間隔 0 の極限です。もしくは、時間 t_0 での速度であることを強調したければ

$$v(t_0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}$$

と書かれます。3 次元でも同様に

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

となります。

- 加速度

$v(t)$ に関しても同じことを考えれば

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

となり、これが加速度 $\mathbf{a}(t)$ の定義となります。

- 運動量

運動量 p は質量 m と速度 v をかけた $p = mv$ として定義されます。

言葉の定義が出来たので、運動している物体が持っている性質を与えます。言い換えれば、運動している物体は何に従っていると仮定すれば、現実の物体の運動を記述できるのかです。この仮定がニュートンの運動の法則です。

ニュートンの運動の法則は

- 第一法則

静止 (rest) もしくは等速直線運動 (uniform rectilinear motion) している物体は力 (force) が作用しない限りその状態を維持する (力が作用していない物体は静止もしくは等速直線運動する)

- 第二法則

物体の運動の変化 (運動量の変化) は作用している力によってなされて、力と同じ方向を向く

- 第三法則

力の作用に対して、反対方向に同等の力が作用する

これらは、力と質量の概念と物体の運動を繋ぐものです。自由落下や惑星の運動法則（物体がどのように動いているか）はニュートン以前にも分かっていたが、運動の原因となるものとして力と質量を入れることで、それらの運動を説明したのがニュートンです（運動に対する力の作用の考えはガリレオも持っていた）。この意味で、ニュートンは運動学を説明するために動力学を導入したとも言えます。

運動の法則で注意すべきことは、力そのものに対する法則が与えられていない点です。第二法則にしても力の定義としか読み取ることができなく、どういうときにどんな力が発生するのかは言っていません。第二法則からの力は、力は運動量の変化を起こす、もしくは運動量の変化は力によって起きるとしているだけです。なので、力は状況に合わせた実験と第二法則から求められるものです。例えば、重力、フックの法則、ローレンツ力といったものです。

第一法則は、物体に作用している力 F が $F = 0$ のとき速度 $v = \text{定数}$ （加速度が 0）ということです。力はベクトルとして与えられていることに注意してください。第一法則は慣性 (inertial) の法則とも呼ばれ、ガリレオの発想がほぼそのまま使われています（静止している場合の慣性の考えはアリストテレスも言及している）。この法則が成立している状況（座標の取り方、座標系）は慣性系 (inertial frame) と呼ばれます。つまり、慣性系は第一法則が成立するように座標軸を決めたものです。もっと直接的には言えば、加速度が 0 になる座標系が慣性系です。

また、慣性系には、慣性系に対して等速直線運動している系ならそれも慣性系という性質があります。例えば、静止している慣性系 K に対して定数の速度 u で動いている系 K' があるとします。 K から見た粒子の位置を x とします（簡単な具体例としては、2次元平面に x, y 軸を書いたのを K 、 x 軸方向に原点から ut 動いたところを原点に x', y' 軸を書いたのが K' 。粒子は K から見れば (x, y) 、 K' から見れば (x', y') ）。そうすると、 K' から同じ粒子の位置を見ると、 K' は速度 u で動いているので $x' = x - ut$ です（ $x = 0$ の位置を ut 離れたところから見れば $-ut$ ）。これを t で 2 回微分すれば、 K は慣性系なので $d^2x/dt^2 = 0$ から、 K' から見た粒子の加速度 $a' = d^2x'/dt^2$ は 0 になります。よって K' 系は慣性系です。

観測者が慣性系に対して加速や回転運動していると、非慣性系となります。第二法則は慣性系で成立する法則ですが、慣性力（観測者が加速や回転運動している場合に働く見かけの力）を導入することで非慣性系で第二法則が成立します。

第一法則は慣性系が十分近似できる範囲で存在することを主張しているとも言えます。例えば、地球上（地球に固定した座標系）では近似的に慣性系と出来ます。

第二法則をもっと具体的に言えば

- 物体の時間による運動量の変化量の割合はそれに作用している力に比例する（運動の変化は作用している力に比例する）

もしくは、運動量の変化でなく、質量と加速度によって

- 力は力が作用する方向に加速度を作り、作用している物体の質量と加速度の積に比例する

と表現することが多いです。どちらにしても第二法則は、物体の運動は物体の質量と作用している力によって決定されることを主張しています。計算の都合上では力は質量と加速度の積としたほうが扱いやすいですが、理論としては運動量の変化としたほうが見通しがいいです。

第二法則を定式化します。簡単のために 1 次元とします。第二法則は、ある微小な時間間隔 Δt での運動量の変化 Δp の割合 $\Delta p/\Delta t$ は物体に作用する力 F に比例することを言っているの（時間間隔を微小にするのは、力が時間で変化している場合、その変化を無視できるような時間間隔にする必要があるから）

$$F \propto \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

これを $\Delta t \rightarrow 0$ にして時間 t での瞬間的な式にすれば

$$F(t) \propto \frac{dp}{dt}$$

となり、比例でなく等式になるように $F(t)$ を定義できているとすることで

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1)$$

これをニュートンの運動方程式 (equation of motion) と呼びます。このように第二法則は運動方程式のことですが、第二法則をこの形にしたのはオイラーです。運動方程式にするとはっきりするように、第二法則は、作用している力が分かっているならば物体の軌道が分かる、物体の軌道が分かっているならば作用している力が分かるとも言えます。

また、微分方程式にしないなら

$$\Delta p = F \Delta t$$

とできて、右辺は力積 (impulse) と呼ばれます。見てわかるように力積は運動量の変化に対応します。

質量 m が時間変化しない定数なら

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

よって、位置 $x(t)$ によって

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

となり、これをニュートンの運動方程式と呼ぶことが多いです。加速度 $a(t)$ によって書けば

$$ma(t) = F(t)$$

となり、質量が時間変化しないときの第二法則になります。(1) はロケットのように質量が時間変化する場合に使われます (燃料消費によって質量が変化する)。

力の単位はニュートン [N] が使われ、 $F = ma$ から

$$[\text{N}] = [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$$

と与えられています。kg はキログラム、m はメートル、s は秒です。つまり、 $1[\text{N}] = 1[\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$ です。

運動方程式は 3 次元では

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

となります。一般的に、 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{x}, d\mathbf{x}/dt, t$ の関数です。

第二法則で $\mathbf{F} = 0$ とした場合は

$$0 = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

$$= \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{v} = \text{const}$$

から、第一法則となります。なので、第一法則は第二法則の特別な場合です。しかし、第一法則は慣性系の存在を主張していることに注意すべきですし、第二法則は慣性系で成立しているものです。

第二法則を重力 (万有引力) に適用したのが、質量 m_1, m_2 の物体があり、物体間の距離が r なら、 m_1 の物体に対して m_2 の物体から

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

という力が引力として作用するというもので、万有引力の法則です。 G は重力定数で $6.67 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})$ と与えられています。

第三法則は作用・反作用の法則とも呼ばれます。式にすれば、物体 A から物体 B に力 F_{AB} が作用しているとき、物体 B から物体 A へ力 F_{BA} が

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

という関係で生じることを言っています。

第三法則と第二法則を合わせると質量を測定できます。1次元において、質量 m_1, m_2 を持つ物体がバネで繋がっているとします。このとき、 m_1 に力 F が加わるなら、第三法則から m_2 には $-F$ の力が加わります。そうすると、第二法則から、それぞれの加速度の絶対値 a_1, a_2 は

$$a_1 = \frac{F}{m_1}, \quad a_2 = \frac{F}{m_2}$$

よって

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}$$

となるので、加速度の比較から、 m_1 の質量を基準とすることで m_2 の質量を知ることができます。

物体の運動を知るだけなら運動の法則そのものを知らなくても導出できます。例えば、加速度 a を定数としたとき、加速度の定義から位置を

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a$$

$$\frac{d}{dt}v = a$$

$$\int dv = \int dt a$$

$$v = at + C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = at + C_1$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$$

と求められるからです。 C_1, C_2 は積分定数 (任意定数) です。これは等加速度運動 (直線の軌道) している物体の運動です (a を重力加速度にすれば自由落下になる)。この導出には位置、速度、加速度の定義しか使っていません (物体の加速度を知っていれば位置まで分かるというだけ)。他にも、例えば円運動は極座標で物体の位置を書いてしまえば微分するだけで加速度まで求められます (位置が時間の関数として分かっているから)。

しかし、運動の法則は運動の変化の要因としての力と質量と、数学的な背景を用意するものです。例えば、円運動している物体はなぜ円に拘束されているのかを運動の法則が与えてくれます。そういったことを知るために運動方程式を作って解いて物体の運動の性質を調べるのが力学です (そもそも微積分が広まるのはニュートン以降で、今の力学の形にしたのはオイラー)。なので、力学は運動の法則をもとにした数理モデルと言えます。他の場合にも当てはめられるように言えば、自然現象を説明できる (実験的に確かめられる) ように作られた仮定 (法則) を数式化した数理モデルです。この数理モデル (物理の理論) を作るのが物理の最初にすることです。それが出来たら数学的に解けるのかという問題に移行され、解けた結果が実験結果と一致するかを確かめることになります。

保存量にも触れておきます。そのために、第二法則を変形します。運動方程式を速度 $v = dx/dt$ によって書き換えて

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

右辺の力 F は x のみに依存しているとします。 v^2 を t で微分して、この運動方程式を入れると微分の連鎖則から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v^2 &= \frac{dv^2}{dv} \frac{dv}{dt} \\ &= 2v \frac{dv}{dt} \\ m \frac{d}{dt} v^2 &= 2vm \frac{dv}{dt} \\ &= 2F(x)v(t) \end{aligned}$$

これを t で積分すると左辺は t 微分が消えるので

$$\frac{1}{2}mv^2 - T_0 = \int dt F(x)v(t)$$

T_0 は積分定数で、後のためにマイナスにしています。ここで $x(t)$ に依存する関数 $U(x)$ を導入して、 t 微分を連鎖則を使って変形し、 t 積分をすると

$$\begin{aligned} \frac{dU(x)}{dt} &= \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} \\ U(x) - U_0 &= \int dt \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

U_0 は積分定数で、ここでも後のためにマイナスにしています。そうすると、 $F(x) = -dU/dx$ とすることで

$$\int dt F(x)v(t) = - \int dt \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = - \int dx \frac{dU}{dx} = -U(x) + U_0$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - T_0 &= -U(x) + U_0 \\ \frac{1}{2}mv^2(t) + U(x) &= T_0 + U_0 \end{aligned}$$

右辺は定数なので、左辺も定数です。よって、第二法則から、力 $F(x) = -dU/dx$ に対して、運動している物体には時間に関係なく定数になっている量

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

が存在することが分かります。これを力学的エネルギー (mechanical energy) と呼び、右辺の第一項

$$\frac{1}{2}mv^2$$

を運動エネルギー (kinetic energy)、第二項 $U(x)$ をポテンシャルエネルギー (位置エネルギー、potential energy) と呼びます。エネルギーを省いてポテンシャルと言うことも多いですが、ポテンシャルはより一般的な量に対して使われる単語にもなっています。力学的エネルギーが定数であることは力学的エネルギー保存の法則と言います。また、 $F(x) = -dU/dx$ で与えられる力を保存力 (conservative force) と言います。ポテンシャルエネルギーは「万有引力によるポテンシャル」でもう少し触れています。

このように力学的エネルギーは運動方程式を変形したものです。なので、運動方程式の情報を取り出せます。特に、 $v(t)$ と $U(x)$ の式なので速度と位置の関係を求めることに使われます。他にも運動方程式を解くために利用されたりもします (「単振動」や「中心力による運動」参照)。また、当たり前ですが、力学的エネルギー保存の x, v は運動方程式の解です (力学的エネルギー保存はその運動方程式に従う質点の軌道上で成立している)。

3次元では

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}$$

$$m \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 = m \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y, z), \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right))$$

であることに注意して、同様に行えば

$$E = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{x})$$

$\partial/\partial x$ は偏微分です。 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$ となる $U(\mathbf{x})$ があれば、 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は保存力です。また、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$ なので、 U には定数の任意性があります (U + 定数としても $\mathbf{F}$ は変わらない)。

運動しているとき定数になっているものを保存量と呼びます。このため、各時間で同じになっていなければいけないので (時間変化しない)、保存量は時間微分で 0 になると定義できます。これをはっきりさせるために、力学的エネルギーが時間微分で 0 になることがもっと直接見える形をついでに示しておきます。

運動方程式に dx/dt をかけて

$$m \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} F(x)$$

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} v^2 = \frac{dx}{dt} F(x) \quad \left(\frac{d}{dt} v^2 = 2v \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \int_a^x dx' F(x')$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \int_a^x dx' F(x')$$

途中で定積分を微分したときの関係

$$\frac{d}{dx} \int_a^x dx' F(x') = F(x)$$

を使っています (a は定数)。これから

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 - \int_a^x dx' F(x') \right) = 0$$

そして、 $F(x')$ の積分は U の定義から

$$\int_a^x dx' F(x') = -U(x) + U(a) \quad (2)$$

a は定数なので、 x 微分で $U(a)$ は消えて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x dx' F(x') &= -\frac{d}{dx} U(x) \\ F(x) &= -\frac{d}{dx} U(x) \end{aligned} \quad (3)$$

となって、上での関係を再現できます。これから、 x でのポテンシャルエネルギーは力 F を a から x まで積分して符号をマイナスにしたものになっていることも分かります。というわけで、(2) を使うことで

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U(x) \right) = 0$$

よって、力学的エネルギーは時間微分で 0 になります。保存力は (2), (3) のようにしてポテンシャルエネルギーと関係しています。今見てきたことから分かるように、保存力なら力学的エネルギーは保存すると言えます。

ちなみに、力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = E$$

であり、 $E = E_0$ と求めれば

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m} (E_0 - U(x))$$

として、2 階微分方程式であった運動方程式が 1 階微分方程式になります。微分方程式が 2 階から 1 階になることは積分に対応するために、保存量を integral of motion と呼ぶこともあります。

また、運動方程式で $F = 0$ とすれば $dp/dt = 0$ なので、第一法則は運動量が保存量であることを言っており、運動量保存の法則と呼ばれます。このため、運動量保存さえ与えてしまえば、第一から第三までの法則は運動量のみで表現することもできます。

運動量保存から第三法則も言えることにも触れておきます。1 次元で考えることにし、物体 A, B を用意し、それぞれの運動量が p_A, p_B だとします。このとき、物体同士の間には、物体 A から物体 B には F_{AB} 、物体 B から物体 A には F_{BA} の力が作用しているとします。しかし、物体同士以外の力は作用していないとします (例えば、物体 A, B を同時に押している外部からの力がない)。このとき、各物体に対する第二法則 (運動方程式) は

$$F_{BA} = \frac{dp_A}{dt}, \quad F_{AB} = \frac{dp_B}{dt}$$

となります。今は物体間には力が働いていますが、物体 A, B をひとかたまりで見たらそこには力が作用していません。つまり、全体の運動量 $p_A + p_B$ を変化させる力は存在していません。よって、運動量保存から $p_A + p_B = \text{const}$ です。これを時間 t で微分すれば

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt}$$

なので

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

となり、第三法則となります。

$F_{AB} = -F_{BA}$ を利用すると、ポテンシャルエネルギーの性質を求めることもできます。2 つの物体の位置を x_A, x_B とし、力を $F_{AB}(x_A, x_B) = -F_{BA}(x_A, x_B)$ とします。このとき、物体 A, B のポテンシャルエネルギーを運動方程式から

$$F_{BA} = -\frac{\partial U(x_A, x_B)}{\partial x_A}, \quad F_{AB} = -\frac{\partial U(x_A, x_B)}{\partial x_B}$$

と与えます。このポテンシャルエネルギーの変数を s (s は定数) だけ動かしたものを s で微分してみると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U(x_A + s, x_B + s) &= \frac{d}{ds} U(X_A(t), X_B(t)) \quad (X_{A,B} = x_{A,B} + s) \\ &= \frac{\partial U(X_A, X_B)}{\partial X_A} \frac{dX_A}{ds} + \frac{\partial U(X_A, X_B)}{\partial X_B} \frac{dX_B}{ds} \\ &= \frac{\partial U(X_A, X_B)}{\partial X_A} + \frac{\partial U(X_A, X_B)}{\partial X_B} \\ &= -(F_{BA}(x_A + s, x_B + s) + F_{AB}(x_A + s, x_B + s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって、0 になります。 $F_{BA} = -F_{AB}$ は運動量保存から出てきているので、物体の位置がどこだろうと成立しています (別の位置に行ってもそこで運動量保存が成立している)。 s の微分で 0 なので、 $U(x_A + s, x_B + s)$ は s がどんな値でも同じです。よって、 $s = 0$ と $s \neq 0$ で同じになり

$$U(x_A + s, x_B + s) = U(x_A, x_B)$$

と言えます。この関係は、2 つの物体による運動 (2 つの物体による系) において運動量が保存されているときに成立します。なので、運動量保存があるとき、ポテンシャルエネルギーが平行移動 (2 つの物体の位置を両方と同じだけ動かす) によって変化しなくなります。

最後に、相対性理論へ行くときに関係してくる話をしておきます。第二法則で現れる質量 m は慣性質量 (inertial mass) と呼ばれます。これに対して、2 つの物体による重力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_g M_g}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

に現れる質量 m_g, M_g は区別され重力質量 (gravitational mass) と呼ばれます。これは物体に作用する力なので、重力質量 m_g を持つ物体の運動方程式はその慣性質量 m によって (簡単にするために 1 次元にします)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_g G \frac{M_g}{x^2}$$

この 2 つの質量に対して $m = m_g$ とすることを等価原理 (equivalence principle) と言います。

等価原理によって起きることをはっきりさせるために、異なる慣性質量 $m^{(1)}, m^{(2)}$ 、重力質量 $m_g^{(1)}, m_g^{(2)}$ を持つ 2 つの物体に対して同じようにして (どちらも M_g は同じ)

$$m^{(1)} a_1 = m_g^{(1)} g, \quad m^{(2)} a_2 = m_g^{(2)} g \quad (g = G \frac{M_g}{x^2})$$

このときの加速度の比は

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_g^{(1)}}{m_g^{(2)}} \frac{m^{(2)}}{m^{(1)}}$$

物体の慣性質量と重力質量が等しければ ($m^{(1)} = m_g^{(1)}, m^{(2)} = m_g^{(2)}$)、 $a_1 = a_2$ となり、異なる質量の物体の加速度が等しくなります。つまり、今は重力だけが作用しているので、自由落下 (重力のみによる落下) している物体は質量に関係なく同じ落下をするとと言えます。このことを等価原理と呼ぶ場合もあり、実験的にかなりの精度で確かめられています。しかし、なぜ等しいのかは説明できていません。

また、ここでの等価原理は、別の等価原理 (アインシュタインの等価原理と強い等価原理) との区別のために、弱い等価原理とも呼ばれます。

・補足

ポテンシャルエネルギーの形から運動の性質を説明することがよくあり、そのとき何を見ているのかを簡単に言っておきます。

まず、必要なのはポテンシャルエネルギー U は力 F と $F = -dU/dx$ という関係であることです。この関係から

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$$

となる点 x_0 (極値) では力が作用していません。このような点 x_0 を平衡点と言います。しかし、極値には極小値と極大値があり、この 2 つによって運動の仕方が変わります (平衡点には細かい数学的な定義がありますが、無視します)。

分かりやすくするために、ポテンシャルエネルギー $U(x)$ は U 字型をしているとします (x を横軸、 $U(x)$ の値を縦軸としたとき、 U 字型の線になっている)。 $U(x)$ を平衡点 x_0 付近で展開します。これはテーラー展開によって

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2$$

$x - x_0$ は微小として 2 次までを取り出しています。今は x_0 が平衡点なので第二項は消えて

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2$$

これを x で微分すれば力 F になって

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{d}{dx} (x - x_0)^2 = -\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

d^2U/dx^2 部分は $x = x_0$ にするので、 x 微分に引っかかりません。この結果から平衡点 x_0 付近での力の方向は、 $x - x_0$ の符号とポテンシャルエネルギーを 2 回微分した $d^2U/dx^2|_{x=x_0}$ の符号によって決まることが分かります。今は U 字型としているので、 x_0 は極小値です。なので、 $d^2U/dx^2|_{x=x_0} > 0$ となっています。よって、 $x - x_0 > 0$ とすれば、力は負の方向に作用します。

この話をまとめると、 U 字型のポテンシャルエネルギー $U(x)$ での極小値 x_0 から正の方向に少しズレた点 x にいると、力が負の方向に働くということです。これは $x - x_0 < 0$ では逆に正の方向に力が働きます。つまり、 x_0 を中心に振動します。このように平衡点周りに制限された運動をするとき、安定な平衡点と呼ばれます。

U 字型を逆向きにして x_0 で極大値だとすると、 $d^2U/dx^2|_{x=x_0} < 0$ となるので、力は $x - x_0 > 0$ では正の方向、 $x - x_0 < 0$ では負の方向に作用します。そうすると、極大値 x_0 から正の方向に少しズレた点 x においては正の方向に力がかかるために、 x_0 に戻ってきません。このように、平衡点周りに運動が制限されないとき、不安定な平衡点と呼ばれます。

これがポテンシャルエネルギーの形を見せて、 U 字型のときは安定、逆向きの U 字型のときは不安定と言う理由です。

力学的エネルギーの保存からも分かることがあります。これは単純で、力学的エネルギー E を超えた U の値を持つ運動はしないということです。運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

と与えられているので、常に $T \geq 0$ であるために (m は正、 $v^2 \geq 0$)、 $E = T + U$ から $U > E$ になれないからです。このことから、 $U(x) \leq E$ となる範囲内に運動は制限されます。

例えば $x = 0$ を中心とする U 字型として、 $x = \pm b$ で $U = E$ になるなら、運動は $-b \sim +b$ の範囲内になります。そして、 $x = \pm b$ のとき運動エネルギーは 0 です。力学的エネルギーは一定なので、 $x = 0$ から x の正方向に運動しているとしたとき、 T は減少し U は増加していった、 $x = b$ で $T = 0$ 、 $U = E$ になります。そして、 $T \geq 0$ のために、これ以上 U の値は増やせないのです。ここから今度は負の方向へ運動することになります (力が負の方向に作用している)。このようにして力学的エネルギー E を超えないポテンシャルエネルギーの範囲内で運動するというイメージを作ることができます。

というわけで、ポテンシャルエネルギーの形が与えられたとき、ポテンシャルエネルギーの極小値、極大値がどのように現れているかと、力学的エネルギーとポテンシャルエネルギーの大きさの関係から、どのように運動するかを読み取れます。