

慣性モーメント

ここでは微分でなく、三次元積分というものが出てきます。この積分は大事なものなので、慣性モーメントを使って簡単に説明します。慣性モーメントの説明は相当にテキトーです。

慣性モーメントというのは

$$N = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

という方程式に使われます。 I が慣性モーメントで、 N はモーメント、 θ は回転角度です。これは回転における運動方程式で直線運動での方程式

$$F = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

ときれいに対応しています。なので慣性モーメントは質量に対応するものだと考えられ、感覚的には慣性モーメントは回転のしやすさといったものを表します。そのため慣性モーメントがわかればどれだけ力を加えればどの程度の回転をするのかということがわかります。

慣性モーメントは角運動量 L から

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\theta}{dt}$$

と表されるので

$$I = mr^2$$

になります。運動方程式の関係から I が何なのか見ましたが、これはズルイ手段なのでちゃんとしたことは力学の本をみてください。

この慣性モーメントの式は質点に対するものなので、例えば棒全体の慣性モーメントを求めたいと思ったら棒の微小部分に関する慣性モーメントを全て足し合わせなければならなく

$$I = \sum_u m_i r_i^2$$

というわけでいろいろな慣性モーメントを求めます。

ちなみに慣性モーメントを使えば回転による運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

になります。

- 棒の慣性モーメント

長さ L 、質量 M の細い棒を原点を中心にしておいた場合（回転軸が中心）を考えます。まず、微小部分の慣性モーメントは

$$dI = x^2 \rho dx$$

となります。 ρ は線密度（棒の厚さは無視）で、 ρdx というのが質量部分です。

あとはこれを棒の全範囲わたって足し合わせればいいので積分します。 Σ と積分は非連続か連続かで選べることができて、棒においては連続になっているので積分を行います

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dI \\ &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx \\ &= \rho \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\rho L^3}{3} = \frac{M}{12} L^2 \quad (M = \rho L) \end{aligned}$$

になり、これが中心軸周りでの棒の慣性モーメントになります。

今度は原点を棒の左端にとってみます。そうすると積分範囲が変わって

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^L x^2 dx \\ &= \rho \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^L \\ &= \frac{M}{3} L^2 \end{aligned}$$

になり、これが棒の端を固定した場合の慣性モーメントです。

これでわかったと思いますが、慣性モーメントというのは回転軸をどこにとるかということで違う値をもつことになり、一般的には重心からはなれるほど慣性モーメントは大きくなります。

- 円の慣性モーメント

やり方は棒のときと同じです。まず原点を中心に半径 a 、質量 M の円を起きます。この円を細い輪で分割していき、その輪を微小部分とすれば

$$dI = r^2 \rho 2\pi r dr \quad \left(\rho = \frac{M}{\pi a^2}, r \leq a \right)$$

$\rho 2\pi r dr$ というのが半径 r の細い輪の質量部分です。 dr は r から微小に伸びた部分なので、そこに円の外周の長さ $2\pi r$ をかければ細い輪の面積になります。輪の部分を経分で書くなら、細く分割された輪の 1 部分で

小さな四角を作って $0 \sim 2\pi$ で積分してやればいいです。その微小部分は dr と $r d\theta$ (扇形の弧の長さ) をかければ作れるので

$$r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r dr$$

となります。

あとはこれを円の範囲で積分すればいいので

$$I = \rho \int_0^a 2\pi r^3 dr = \frac{\pi \rho}{2} a^4 = \frac{M}{2} a^2$$

になります。今求まったものを z 軸周りの慣性モーメントだとすると、 x, y 軸周りの慣性モーメントは

$$I_x = I_y = \frac{M}{4} a^2$$

になります。これは薄い板の剛体を xy 平面に置いた場合

$$I_z = I_x + I_y$$

という関係をもつことからです。証明は簡単にできて

$$I_z = m r^2 = m(x^2 + y^2) = I_x + I_y$$

これで証明終了です。

ここでの計算は

$$\int_0^a r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

という積分を行っただけです。 r^2 を脇においておけば

$$\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

という積分でこれは 2 次元での円の面積そのものです。

● 球の慣性モーメント

棒は一次元的、円は厳密には三次元ですが平面なので二次元のようなものでしたが、球では完全に三次元で扱うことになるので、ここが本題です。球は半径 a , 質量 M とします。

まず z 軸まわりなら

$$I_z = \rho \int (x^2 + y^2) dV \quad (dV = dx dy dz)$$

となり、積分範囲は球になるようにとります。これを積分すればいいんですが、このままだと積分範囲が面倒なものになっているのでちょっとした工夫をします。

z 軸まわりと同様にして x 軸まわりと y 軸まわりは

$$I_x = \rho \int (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \rho \int (x^2 + z^2) dV$$

です。これらの関係は球の対称性から

$$I_x = I_y = I_z$$

になっています。なのでこの3つを足し合わせれば

$$3I_z = 2\rho \int (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2\rho \int r^2 dV$$

これで積分範囲を簡単にすることができます。 r は原点からの距離を表しているので球全体での積分をすればいいということです (ここからの少ない話が本題です)。 dV の形は後で説明するとして、積分を行うと

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{2}{3}\rho \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \\ &= \frac{2}{3}\rho \int_0^a dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3}\rho \int_0^a dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}\rho \int_0^a r^4 dr [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= \frac{8\pi}{15}\rho a^5 \\ &= \frac{2}{5}Ma^2 \quad (\rho = \frac{3M}{4\pi a^3}) \end{aligned}$$

となります。

モーメントの話は終わりにして、 n 次元での積分の話をしてします。1次元はただの積分でしかないので飛ばします。2次元での積分は

$$\int dx \int dy$$

という積分です。このとき、積分範囲が半径 a の円を作るように取られているとします ($x^2 + y^2 \leq a^2$)。そうすると積分が

$$\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

となって明らかに面倒です。なので、極座標に移してみます。

原点からの距離を r 、そのベクトル r と x 軸 (もしくは y 軸) との角度を θ とします。そうすると微小な長方形は、 $rdrd\theta$ で作れます。この微小面積を r と θ で積分すれば

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta$$

となって円の面積になります。 θ は r と軸 (x 軸か y 軸) との間の角度なので、 $0 \sim 2\pi$ までしか取れません。このように 2 次元の直交座標では面倒な円の面積を極座標では簡単にせ、上での円の慣性モーメントも簡単に計算できます。このとき重要になるのが微小部分 $dS = rdrd\theta$ です。

これをもう少し拡張することができます。今の場合では $dx dy$ の積分も円になるという縛りの元で

$$\int dx \int dy = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r \quad (x^2 + y^2 \leq a^2)$$

となっていますが、もし x と y の積分が全空間に渡っているなら (積分範囲が $-\infty$ から $+\infty$)、円になるという縛りなしで

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r$$

と書けます。これは両方の積分が全空間に渡って積分しているために等しくなっています。これが 2 次元での全空間積分です。慣性モーメントの計算では単に円や球を計算するのには極座標が便利というだけでしたが、このように全空間積分においては、常に直交座標と極座標の関係が与えられています。

一応積分の表記にも触れておきます。積分の書き方としては

$$\int f(x) dx, \int dx f(x)$$

という 2 つがあります。 $f(x)dx$ は数学で、 $dx f(x)$ は物理で多く使われます。理由は簡単で物理では具体的な $f(x)$ の積分を行うので、 $f(x)$ が長いときは $dx f(x)$ と書いた方が見やすいからです。同様に 2 重積分でも

$$\int_c^d \int_a^b f(x) dx dy, \int_c^d dy \int_a^b f(x) dx, \int_c^d dy \int_a^b dx f(x)$$

という表記が使われます。定積分にしてるのは積分記号が x, y のどちらに対応しているか見やすくするためです。積分範囲が揃っているときは

$$\int_a^b dx dy$$

と書いたりもします。積分の表記は意味が通じればいいという程度の感覚で、かなり自由に使われているようです。3以上の多重積分でも基本的に同じ表記が使われます。

3次元になると感覚的に面倒になります。3次元微小体積は極座標 (r, θ, ϕ) で

$$dV = r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

このように書けます。ある点 (r, θ, ϕ) は、ベクトルを r としたとき、原点から r の距離、 z 軸と r の角度が θ 、 r を xy 平面に落としたとき $(\theta = \pi/2)$ の x 軸との角度が ϕ であることを表します。

なんでこうなるのかを簡単に説明します。まず三次元座標において適当な長さ r の線を引き、その線を dr だけ伸ばします。そこから θ 方向と ϕ 方向へ微小に動かします。こうすることで、 r の先端に小さな直方体が出来上がります。その辺の長さは

$$dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$$

このようになっています。なのでこれらを掛ければ微小体積になります。

微小体積を半径 a の球になるように積分すると

$$\int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

となります。これを実行すると球の体積になります。このために、 ϕ に対しては $0 \sim 2\pi$ 、 θ に対しては $0 \sim \pi$ としています。このように取る理由を簡単に言っておきます。まず微小体積要素を

$$r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi$$

のように書きます。このときの $r \sin \theta$ は xy 平面に出来る円の半径です。この円の円周は

$$\int_0^{2\pi} d\phi r \sin \theta = 2\pi r \sin \theta$$

と求めます。 $r d\theta$ は θ での半径 $r \sin \theta$ の円と、 $\theta + d\theta$ での半径 $r \sin(\theta + d\theta)$ の円との間の微小な長さなので $2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta$ は二つの円による幅 $r d\theta$ の帯の面積です。よって、 θ を 0 から π で積分すれば球の表面積になって(半径 $r \sin \theta$ の円の円周を足し合わせるので $0 \leq \theta \leq \pi$ で球になる)

$$\int_0^\pi d\theta 2\pi r \sin \theta \cdot r = 4\pi r^2$$

そして、 $4\pi r^2 dr$ は半径 r と半径 $r + dr$ の球の間の体積になるので、 r を欲しい半径 a まで積分すれば

$$\int_0^a dr 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

となり、半径 a の球の体積になります。

この微小体積と積分はあっちこっちで出てくるので覚えておいたほうがいいです。これによって上で見たように、球での積分が非常に簡単になっています。ちなみに x, y, z による積分では

$$\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz$$

となっています

3次元での場合も2次元と同じで、球になるという縛りのもとで

$$\int dx \int dy \int dz = \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2)$$

となり、全空間積分とすることで

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz = \int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

となります。

球の慣性モーメントを求めるときのように球が関係するときは極座標にした方が計算しやすいというのも重要ですが、全空間積分においては直交座標と極座標の積分が直接関係するという性質の方がよく見るかもしれません。入門的な力学ではあまり見ないかもしれませんが、全空間積分を行うことはそんなに珍しくありません。

ここから3次元だけを使っていますが、2次元とかでも同じです。積分が3次元であることを表す表記の仕方としては

$$d^3x = dx dy dz$$

もしくは面積や体積に対応させるために $dS = dx dy$ や $dV = dx dy dz$ と書きます。 dx, dy, dz の積分範囲がバラバラのときは d^3x のようにはほぼ書きません。 d^3x のように書いてあるときは全空間積分の場合が多いです。一応注意ですが、 dx^2 のように書いてあるのは x^2 が積分変数であることを表します。全空間積分の場合では、定積分でも d^3x 積分の範囲を書かずに ($|x| = |r| = r$)

$$\int d^3x f(x) = \int_0^\infty d|x| |x|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f(|x|, \theta, \phi)$$

のように書かれます。 $|x|$ に上限があるときは積分のところにそれを書いて

$$\int_0^a d^3x f(x)$$

としたりします(下にも書いたりもします)。

全空間積分の性質として、被積分関数の変数 x を $-x$ としても積分の結果は変わらないというのがあります(全空間と言っていますが、角度積分だけで示せるので $|x|$ の範囲は関係ないです)。これは3次元極座標で言えば、ベクトル x を球を描くように動かして積分するために、 $-x$ としても結局同じ球を描くからです。具体的には、例えば3次元で

$$\int_0^a d|x| |x|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \int_0^a d|x| |x|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

このようになります。実際に積分すれば(角度積分部分だけみます)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} &= \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{|\mathbf{p}||\mathbf{x}| \cos \theta} \\
&= 2\pi \int_{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}^{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} dz \frac{\sin \theta}{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}| \sin \theta} e^z \quad (z = |\mathbf{p}||\mathbf{x}| \cos \theta) \\
&= 2\pi \frac{1}{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} (e^{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} - e^{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|})
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}$ と $\mathbf{x}$ の間の角度が θ なのは、 $\mathbf{p}$ を基準にしてそこから角度 θ のところに $\mathbf{x}$ がいるようにするからです ($\mathbf{p}$ を z 軸と同じ扱いにする)。 $-\mathbf{x}$ では

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} &= 2\pi \int_{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}^{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} dz \frac{\sin \theta}{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}| \sin \theta} e^{-z} \quad (z = |\mathbf{p}||\mathbf{x}| \cos \theta) \\
&= 2\pi \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} (e^{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} - e^{-|\mathbf{p}||\mathbf{x}|})
\end{aligned}$$

となるので、一致します。

このように空間を覆う積分は

$$\int d^3x f(\mathbf{x}) = \int d^3x f(-\mathbf{x})$$

となっているために

$$f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$$

となる奇関数では積分は 0 になります。単純な例としては

$$\int_0^a d|\mathbf{x}| |\mathbf{x}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) = 0$$

ということです。これも一応やっておきます。この場合での角度積分は

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi |\mathbf{x}||\mathbf{z}| \cos \theta$$

θ 積分で $\cos \theta$ が引っかかり

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin^2 \pi - \sin^2 0}{2} = 0$$

から 0 になっていることが確かめられます。また、原点から出ている任意のベクトル $\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ を全空間積分しても ($r = |\mathbf{x}|$)

$$\begin{aligned}
\int d^3x \, \mathbf{r} &= \int_0^a d|\mathbf{x}| |\mathbf{x}| \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\
&= \int_0^a d|\mathbf{x}| |\mathbf{x}| \int_0^\pi d\theta \sin \theta (0, 0, \cos \theta) \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

となります。

空間積分は現実的にはあろうがなかろうが数学的に n 次元まで拡張することができます。例えば、相対論的な問題では 4 次元座標を取るので、4 次元での極座標を使って 4 次元積分を実行するときがあります。