円と球の積分

物理では円や球の範囲での積分がよく出てくるので、それについて見ていきます。最初に 2 重積分の簡単な話をしていますが、飛ばしてもおそらく平気です。

変数が複数あるときの積分を多重積分 (multiple integral) と言い、2 個なら 2 重積分 (double integral)、3 個なら 3 重積分 (triple integral)、n 個なら n 重積分となります。2 重積分について数学的なことは無視して簡単に説明しておきます。

まず、$a \leq x \leq b$ における関数 $f(x)$ の積分は簡単に言えば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x = \int_a^b dx\ f(x) \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n}) \tag{1}$$

と定義されています。これを変数が 2 個の場合に拡張します。

変数が 2 個なので 2 次元の面を使います。xy 平面上のある閉じている領域 R があるとして、領域 R における微小な面 R_i を足し合わせることを考えます。領域 R を x 軸に垂直な線と y 軸に垂直な線によって n 個の長方形に分割し、その長方形の各面積を ΔA_i とします。領域 R が四角形でなければ領域 R からはみ出る長方形が現れますが、ΔA_i を小さくしていけば領域 R の形に近づいていくと考えます。ΔA_i の位置を x_i, y_i で指定すれば、その地点での x, y を変数に持つ関数は $f(x_i, y_i)$ とできます。後は (1) と同じようにして

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i = f(x_1, y_1)\Delta A_1 + f(x_2, y_2)\Delta A_2 + \cdots f(x_n, y_n)\Delta A_n$$

とした和を作り、$n \to \infty$ ($\Delta A_i \to 0$) の極限にしたものを

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i = \int_R dA\ f(x, y)$$

と表記し、これを 2 重積分 (double integral) と呼びます。$f(x, y) = 1$ なら領域 R の面積になります。

このような積分は物理で頻繁に出てきます。例えば、厚さを無視できるほど薄い面状の物体があり、その面密度が $\sigma(x, y)$ で与えられているとき、上でのように物体を微小な長方形で分割した部分の質量は面積 ΔA_i によって

$$\Delta M_i = \sigma(x_i, y_i)\Delta A_i$$

と与えられます。これを物体の形になるように全て足し合わせれば全体の質量になるので、$\Delta A_i \to 0$ の極限によって

$$M = \int_R dA\ \sigma(x, y)$$

となります。R は物体の範囲です。しかし、実際の問題において 2 重積分の定義に従って計算するのは難しい場合がほとんどです。というわけで、2 重積分を計算するための方法を作ります。

発想は、面積 ΔA_i の足し合わせを微小な $\Delta x, \Delta y$ の足し合わせに変えることで、x, y での積分にするというものです。領域 R における微小な長方形の面積が、R を分割した x 軸の微小な幅 Δx_i と y 軸の微小な幅 Δy_j によっ

て、$\Delta x_i \Delta y_j$ と書けるとします。i, j は x 軸、y 軸において $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と $y_1, y_2, \ldots, y_m$ として分割したときの i, j 番目の幅です。最初に面そのものを与えるのでなく、x, y の分割から面を作っているために

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \Delta x_1 \Delta y_1 \ , \ (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = \Delta x_1 \Delta y_2 \ , \ \ldots$$

として、領域 R における微小な長方形の面積を与えています。

このようにして領域 R を分割したとき、x, y はそれぞれ独立に値を取れないです。例えば、後で見るように半径 a の円の円周上であるためには $x^2 + y^2 = a^2$ という条件がつきます。

細かいことは無視して、微小面積が $\Delta x_i \Delta y_j$ で与えられているとし、$f(x_i, y_j)$ による和を i, j に対して取れば

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

先に i の和を取るようにして (j を固定する)、$n \to \infty$ にすると

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \big(\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \big) \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \big) \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} F(y_j) \Delta y_j$$

和と極限の結果を $F(y_j)$ としています。$m \to \infty$ を取って積分の表記を使うと

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} F(y_j) \Delta y_j = \int dy \ F(y) = \int dy \big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \Delta x_i \big) = \int dy \int dx \ f(x, y)$$

と書け、これを累次積分や繰り返し積分 (iterated integral, repeated integral) と言います。x の積分をし、その後に y の積分をするという積分です。多重積分と累次積分は連続関数であれば一致することがフビニ (Fubini) の定理によって示されているので、多重積分の計算は累次積分によって行われます。一致するために、大抵の場合で

$$\int_R dA \ f(x, y) = \int dy \int dx \ f(x, y)$$

と書かれます。

積分範囲を指定せずに書きましたが、積分範囲には気を付ける必要があります。今は 2 次元の領域 R を覆うように x, y の範囲を決めなくてはならないので、一般的には x, y は独立になっていません。なので、例えば y の範囲が a から b となっているとき、x の範囲を領域 R になるような y に依存した関数によって与えます。領域 R を作るためのその関数を $h_1(y), h_2(y)$ とすれば

$$\int_a^b dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \ f(x, y)$$

と書けます。累次積分で厄介なのはこの積分範囲を決めることで、これは後で出てくる円の場合を見た方が分かりやすいです。

また、積分の順序は変えることができ

$$\int_a^b dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \ f(x, y) = \int_c^d dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \ f(x, y)$$

このときは x の範囲に対応して y が決まるので x に依存する関数で書いています。

変数が 3 個でも考え方は同じです。3 重積分は領域 R が 3 次元になるだけなので、微小な直方体の体積を ΔV、変数を x, y, z とすれば

$$\int_R dV\ f(x,y,z) = \int_a^b dz \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} dy \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx\ f(x,y,z)$$

として、x, y, z の累次積分で計算されます。これも積分の順序を変えられます。

2 重積分、累次積分の表記の注意にも触れておきます。積分の書き方としては

$$\int f(x)dx\ ,\ \int dx\ f(x)$$

という 2 つがあります。$f(x)dx$ は数学で、$dxf(x)$ は物理で多く使われます。理由は簡単で物理では具体的な $f(x)$ の積分を行うので、$f(x)$ が長いときは $dxf(x)$ と書いた方が見やすいからです。同様にして累次積分でも

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy\ ,\ \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx\ ,\ \int_c^d dy \int_a^b dx\ f(x,y)$$

という表記が使われます。x の範囲を a, b、y の範囲を c, d としています。積分範囲が揃っているときは

$$\int_a^b dxdy$$

と書いたりもします。一番左のは紛らわしくないように

$$\int_c^d \int_a^b f(x)dxdy = \int_c^d \big(\int_a^b f(x)dx\big)dy$$

としている場合もたまにあります。ただし、2 重積分の意味で

$$\int_R \int f(x)dxdy$$

のように書いていることもあります。

多重積分と累次積分の表記は意味が通じればいいという程度の感覚でかなり自由に使われているので、勘違いをしないように注意が必要です。

物理では 2 重積分、3 重積分より 2 次元積分、3 次元積分という言い方をしていることのほうが多いです。2 次元なら変数は 2 個、3 次元なら変数は 3 個になるからというだけです。また、累次積分という単語はほぼ出てこなく、2 次元積分、3 次元積分は累次積分のことという感覚になっています。

どういう計算をするのかの具体例を 1 つ見ておきます。積分範囲を適当に与えた場合として、$f(x) = x + y$ の累次積分は

$$\int_0^3 dy\int_y^{3y} dx(x+y)=\int_0^3 dy[\frac{1}{2}x^2+yx]_y^{3y}= \int_0^3 dy(\frac{9}{2}y^2+3y^2-\frac{1}{2}y^2-y^2)$$
$$= \int_0^3 dy\ 6y^2$$
$$= \left[2y^3\right]_0^3$$
$$= 54$$

最初に y は定数のようにして x の積分を実行し、x の範囲が y で与えられているのでそれを x に入れて y の積分を実行するという計算です。

領域 R が円の場合を使って円の面積を求めます。円の半径を a とし、円の中心が原点になっているとします。領域 R における 2 重積分と累次積分は、$f(x,y)=1$ として

$$\int_R dA\ =\int_a^b dy\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx$$

x の積分は y を離散的に書けば、$y=a,y_1,y_2,\ldots,y=b$ のそれぞれに対して領域 R に含まれるように x の範囲を決めて積分を実行するという形になっています。なので、y の値に対して円の形になるように x の範囲を与えます。例えば、$y=0$ のとき x は $-a$ から a です。

半径 a の円であるという条件は $x^2+y^2\leq a^2$ によって与えられ、y に対する円周上の x の位置は

$$x=\pm\sqrt{a^2-y^2}=\pm h(y)$$

このため、y の値に対する x の範囲は $-h(y)$ から $h(y)$ です。この範囲で積分を実行すると

$$\int_R dA=\int_{-a}^a dy\int_{-h(y)}^{h(y)} dx=2\int_{-a}^a dyh(y)=2\int_{-a}^a dy\sqrt{a^2-y^2}$$
$$=4\int_0^a dy\sqrt{a^2-y^2}$$
$$=4a\int_0^a dy\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}$$
$$=4a^2\int_0^{\pi/2} d\theta\cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\qquad(\frac{y}{a}=\sin\theta\ ,\ dy=a\cos\theta d\theta)$$
$$=4a^2\int_0^{\pi/2} d\theta\cos^2\theta$$
$$=4a^2\int_0^{\pi/2} d\theta(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2})$$
$$=4a^2[\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\theta}{2}]_0^{\pi/2}$$
$$=4a^2\frac{\pi}{4}$$
$$=\pi a^2$$

となり、円の面積になります。

この積分は別の見方をすると感覚的に分かりやすくなります。$y=0$ から $y=\Delta y$ の間の部分を見ます。もし、Δy が十分小さければ、この部分は長方形と見なせます (円弧が直線になるほど Δy が小さい)。そうすると $2a\Delta y$ が面積になります。このようにして円を、x 軸の長さが $2\sqrt{a^2-y^2}$、幅が Δy の微小な長方形で分割します。これらを y が $-a$ から a の範囲で足し合わせれば円を覆えるので、その和を $\Delta y\to 0$ として積分にすれば

$$2\int_{-a}^{a}dy\sqrt{a^2-y^2}=4\int_{0}^{a}dy\sqrt{a^2-y^2}=\pi a^2$$

というわけで、円の面積になります。このような計算を行うために、x の範囲は求めたい領域 R を囲む曲線の関数として与えられます。

このような円の積分は物理の問題でよく出てきますが、今のようにデカルト座標でなく極座標で行ったほうが簡単に求められます。それを見ていきます。

まず、累次積分は微小面積 $\Delta x\Delta y$ を作るところから始まっています。なので、$\Delta x\Delta y$ を極座標で作れば、そのまま極座標での累次積分にできます。作り方は簡単です。

原点とある点とのベクトルを $\boldsymbol{r}$、x 軸と $\boldsymbol{r}$ との間の角度 (x 軸から $\boldsymbol{r}$ へ向かう方向を正) をとして、2 次元極座標 (r,θ) を与えます。このとき θ から $\Delta\theta$ 動かしたときの円弧は $r\Delta\theta$ ($r=|\boldsymbol{r}|$) で与えられ、円弧を直線と見なせる程 $\Delta\theta$ は小さいとします。そして、$\boldsymbol{r}$ の長さを $\boldsymbol{r}$ 方向に微小に Δr だけ伸ばしたとします。そうすると、Δr と $r\Delta\theta$ を辺とする長方形が作れて、その面積は $r\Delta r\Delta\theta$ です。これが極座標での微小面積になります。実際に、これを領域 R が半径 a の円として、r を 0 から a の範囲、θ を 0 から 2π の範囲として累次積分の形にすると

$$\int_R dA=\int_0^a dr\int_0^{2\pi}d\theta\ r=2\pi\int_0^a dr\ r=\pi a^2$$

として、円の面積になります。このように、極座標にすると簡単に求まります。2 次元極座標での微小面積 $r\Delta r\Delta\theta$ は覚えておくと便利です。

この積分もデカルト座標のときと同じような見方ができます。適当な半径 r での円周と、そこから微小に伸ばした半径 $r+\Delta r$ での円周を見ます。この 2 つの円周の長さは異なっていますが、Δr が十分小さければほぼ同じになります。そうすると、r と $r+\Delta r$ の間の帯を長方形として、その面積は $2\pi r\Delta r$ と与えられます。半径 a までの範囲で作られるこの帯を足せば半径 a の円になるので、$\Delta r\to 0$ での積分として

$$2\pi\int_0^a dr\ r=\pi a^2$$

となり、円の面積になります。最初の帯の長さ $2\pi r$ を求めたのが θ の積分に対応します。

次に 3 次元として球の体積を求めます。3 次元デカルト座標 (x,y,z) とし、半径 a の球が中心が原点になるように置いてあるとします。半径 a の球での球面上の位置は

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

となっています。3 重積分を z,y,x の順番で実行することにして

$$\int_R dV=\int_{-a}^{a}dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}dy\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)}dz$$

円のときと同じように考えれば、積分範囲は球面上の位置で与えられるので

$$g_1 = -\sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ g_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$h_1 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ ,\ h_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

となります。これを確かめます。

x が与えられたとして、その x の位置で x 軸に垂直な面で球を切ったとします。この切断面は yz 平面における円です。この円において y が与えられたとき、円周上の z は

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \pm h(x, y)$$

となるので、この円の面積を求めるときの z の範囲は $-h(x, y)$ から $h(x, y)$ です。そして、この円における y の範囲は

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} = -g(x)\ ,\ y = \sqrt{a^2 - x^2} = g(x)$$

となっているので、円の面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-g(x)}^{g(x)} dy \int_{-h(x,y)}^{h(x,y)} dz &= 2\int_{-g(x)}^{g(x)} dy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\
&= 4\sqrt{a^2 - x^2}\int_0^{g(x)} dy\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2 - x^2}} \\
&= 4\sqrt{a^2 - x^2}\int_0^{g(x)} dy\sqrt{1 - \frac{y^2}{a'^2}} \qquad (a' = \sqrt{a^2 - x^2}) \\
&= 4\sqrt{a^2 - x^2}a'\int_0^{\pi/2} d\theta\cos\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} \qquad (\frac{y}{a'} = \sin\theta\ ,\ dy = a'\cos\theta d\theta) \\
&= 4(a^2 - x^2)\frac{\pi}{4} \\
&= \pi(a^2 - x^2)
\end{aligned}$$

この円と、同じようにして $x + \Delta x$ で球を切断したときの円によって挟まれる部分の体積は、どちらの円も同じ面積になっているほどに Δx が小さいなら、$(a^2 - x^2)\Delta x$ です。これを $x = -a$ から $x = a$ の範囲で足し合わせれば球を覆えるので、$\Delta x \to 0$ として積分で計算すると

$$\pi\int_{-a}^{a} dx(a^2 - x^2) = \pi\big[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\big]_{-a}^{a} = \pi\big[a^3 - \frac{1}{3}a^3 + a^3 - \frac{1}{3}a^3\big]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

となり、球の体積になります。というわけで、領域 R が半径 a の球での累次積分は

$$\int_R dV = \int_{-a}^{a} dx\int_{-g(x)}^{g(x)} dy\int_{-h(x,y)}^{h(x,y)} dz$$

$$g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ h(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

となります。

3 次元極座標にして求めます。3 次元になると感覚的に面倒になるだけですることは同じです。3 次元極座標 (r,θ,ϕ) において、z 軸と $\boldsymbol{r}$ の間の角度 θ (z 軸から離れる方向を正) を微小に $\Delta\phi$ 増加させます。そうすると、この円弧の長さは $r\Delta\theta$ です。次に、$\boldsymbol{r}$ を z 軸のベクトル $\boldsymbol{z}$ と xy 平面上のベクトル $\boldsymbol{R}$ の和として $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{z}$ とします。$|\boldsymbol{R}|=r\sin\theta$ **で** x 軸と $\boldsymbol{R}$ の間の角度が ϕ なので、ϕ を $\Delta\phi$ だけ増加させたときの円弧は $r\sin\theta\Delta\phi$ です。後は $\boldsymbol{r}$ 方向に長さを Δr だけ伸ばし、この 2 つの円弧は直線と見なせるほどに小さいとすれば、$\Delta r, r\Delta\theta, r\sin\theta\Delta\phi$ を辺とする直方体が作れます。これの体積は

$$r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi$$

となり、これが 3 次元での微小体積となります。これも覚えておくと便利です。

球での極座標における積分範囲は

$$\int_R dV=\int_0^a dr\ r^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

θ,ϕ の範囲をこのように取ると球の表面を覆えます。まず、微小体積を

$$r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi=\Delta r\cdot r\Delta\theta\cdot r\sin\theta\Delta\phi$$

と書きます。右辺の「・」は式の区切りを分かりやすくするために書いただけです。このときの $r\sin\theta$ は xy 平面にできる円の半径です。この円の円周は

$$\int_0^{2\pi}d\phi\ r\sin\theta=2\pi r\sin\theta$$

と求まります。$r\Delta\theta$ は θ での半径 $r\sin\theta$ の円と、$\theta+\Delta\theta$ での半径 $r\sin(\theta+\Delta\theta)$ の円との間の微小な長さなので $2\pi r\sin\theta\cdot r\Delta\theta$ は 2 つの円による幅 $r\Delta\theta$ の帯の面積です。よって、θ を 0 から π で積分すれば球の表面積になって (半径 $r\sin\theta$ の円の円周を足し合わせるので $0\le\theta\le\pi$ で球になる)

$$\int_0^\pi d\theta\ 2\pi r\sin\theta\cdot r=4\pi r^2$$

今の話から分かるように θ の範囲を 0 から 2π にすると 2 重に表面を覆ってしまいます。その上、sin は 0 から π は正、π から 2π は負なので、積分は 0 になってしまいます。

後は、$4\pi r^2\Delta r$ は半径 r と半径 $r+\Delta r$ の球の間の体積になることから、r を欲しい半径 a まで積分すれば

$$\int_0^a dr\ 4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi a^3$$

となり、球の体積になります。

このように円や球の積分は極座標にすることで簡単になります。注意としては、任意の領域 R におけるデカルト座標での積分は

$$\int_R dx \int_R dy \neq \int_0^a dr\ r \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$\int_R dx \int_R dy \int_R dz \neq \int_0^a dr\ r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

となっていることです。これは今までの話から当然で、右辺は円と球になるように積分範囲を取っているので、左辺も領域 R が円と球になっていないと等号にはなりません。なので、等号であるためには円と球の領域であることを示すために

$$\int dx \int dy = \int_0^a dr\ r \int_0^{2\pi} d\theta \quad (x^2 + y^2 \leq a^2)$$
$$\int dx \int dy \int dz = \int_0^a dr\ r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2)$$

のようにして、条件を加えて書く必要があります。

もう 1 つ等号になる場合があり、x, y, z と r の範囲が $-\infty$ から ∞ になっている場合です。この範囲ではどちらの場合でも 3 次元空間全体での積分になるために一致します。なので、全空間での積分のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz = \int_0^{\infty} dr\ r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

となります。2 次元でも同じです。力学では無限大の範囲を取ることはあまりないですが、量子力学ではよく出てきます。

ついでなので、3 次元での全空間積分を簡単に見ておきます（2 次元でも表記は同じ）。積分が 3 次元であることを表す表記の仕方としては

$$\int_R d^3x = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz$$

R は積分したい 3 次元の領域です。もしくは面積や体積に対応させるために $dS = dxdy$ や $dV = dxdydz$ と書かれます (累次積分の意味)。一応注意ですが、dx^2 のように書いてあるのは x^2 が積分変数であることを表します。

全空間積分の場合では、定積分でも積分の範囲を書かずに ($\boldsymbol{x} = (x, y, z),\ |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{r}| = r$)

$$\int d^3x\ f(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\infty} d|\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{x}|^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ f(|\boldsymbol{x}|, \theta, \phi)$$

のように書かれます。$|\boldsymbol{x}|$ に上限があるときは積分のところにそれを書いて

$$\int^a d^3x\ f(\boldsymbol{x})$$

としたりします (下に書いたりもします)。

全空間積分の性質として、被積分関数の変数 $\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{x}$ としても積分の結果は変わらないというのがあります。全空間と言っていますが、角度積分だけで示せるので $|\boldsymbol{x}|$ の範囲は関係ないです。これは 3 次元極座標で言えば、ベ

クトル $\boldsymbol{x}$ を球を描くように動かして積分するために、$-\boldsymbol{x}$ としても結局同じ球を描くからです。具体的には、例えば

$$\int_0^a d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi e^{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=\int_0^a d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi e^{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

となります。実際に角度積分を実行すれば

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi e^{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} &= \int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi e^{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|\cos\theta}\\ &=2\pi\int_{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}^{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}dz\frac{\sin\theta}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|\sin\theta}e^z\quad(z=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|\cos\theta)\\ &=2\pi\frac{1}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}(e^{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}-e^{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ の間の角度が θ なのは、$\boldsymbol{p}$ を基準にしてそこから角度 θ のところに $\boldsymbol{x}$ がいるようにするからです ($\boldsymbol{p}$ を z 軸と同じ扱いにする)。$-\boldsymbol{x}$ では

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi e^{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} &=2\pi\int_{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}^{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}dz\frac{\sin\theta}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|\sin\theta}e^{-z}\quad(z=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|\cos\theta)\\ &=2\pi\frac{1}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}(e^{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|}-e^{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{x}|})\end{aligned}$$

となるので、一致します。

このように空間を覆う積分は

$$\int d^3x\ f(\boldsymbol{x})=\int d^3x\ f(-\boldsymbol{x})$$

となっているために

$$f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$$

となる奇関数では積分は 0 になります。単純な例としては

$$\int_0^a d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\ (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})=0$$

ということです。この場合での角度積分は

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})=\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{z}|\cos\theta$$

θ 積分で $\cos\theta$ が引っかかり

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos\theta = \frac{\sin^2\pi - \sin^2 0}{2} = 0$$

から、0 になっていることが確かめられます。また、原点から出ている任意のベクトル $\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ を全空間積分しても $(r = |\boldsymbol{x}|)$

$$\begin{aligned}
\int d^3x\ \boldsymbol{r} &= \int_0^a d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}| \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\
&= \int_0^a d|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}| \int_0^\pi d\theta \sin\theta (0, 0, \cos\theta) \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

となります。

空間積分は現実的にはあろうがなかろうが数学的に n 次元まで拡張することができます。例えば、相対論がかかわる問題では、4 次元での極座標を使って 4 次元積分を実行するときがあります。