

## 万有引力によるポテンシャル

ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）の具体例として万有引力の場合を扱います。ここではポテンシャルと言つていい、基本的に万有引力のポテンシャルエネルギーです。

具体的な万有引力による運動には触れずに、ポテンシャルエネルギーをだしているだけです。2変数のポテンシャルエネルギーなので、ポテンシャルエネルギーの説明としては分かりづらくなっています。

ベクトル、偏微分は知っているとしています。

ニュートンの万有引力の法則は、慣性系において位置  $r_1$  にいる質量  $m_1$  の物体  $A_1$  と位置  $r_2$  にいる質量  $m_2$  の物体  $A_2$  の間には

$$|\mathbf{f}| = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

という大きさの力がお互いを近づけるように働くと言っています（物体は質点のこと）。物体  $A_1$  が物体  $A_2$  に及ぼしている力はベクトルによって

$$\mathbf{f}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (|\mathbf{f}_{12}| = |\mathbf{f}|)$$

物体  $A_2$  が物体  $A_1$  に及ぼす力は作用・反作用の法則から

$$\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12} = G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

と書けます。 $G$  は重力定数で

$$G = 6.6732 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]$$

力  $\mathbf{f}_{12}$  は 2 つの物体を結ぶ直線に沿っていて、マイナスがいるために引力です（物体  $A_2$  を物体  $A_1$  に近づける方に働いている）。マイナスで引力であることは、物体  $A_1$  は原点  $\mathbf{r}_1 = 0$  にいるとして

$$\mathbf{f}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} = -G m_1 m_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2|^2} \mathbf{e} \quad (\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|})$$

と書くとはっきりします。 $\mathbf{e}$  は  $\mathbf{r}_2$  方向の単位ベクトルで、 $-\mathbf{e}$  の方向（物体  $A_2$  から物体  $A_1$  の方向）に力が作用しているので、 $A_2$  にとっては引力になっています。 $\mathbf{f}_{21}$  は  $\mathbf{f}_{12}$  の反対方向なので  $A_1$  から  $A_2$  への方向を向いていて、 $A_1$  にとっては引力です。

単語の問題ですが、万有引力（universal gravitation）と重力（gravity）は区別されています。万有引力は質量を持った物体間に働く力を指し、重力は万有引力に遠心力のような他の力を考慮したものです。しかし、区別している場合もあればしてない場合もあり、無駄な混乱を引き起こす区別になっています（一般相対性理論の話ではほぼ区別していない）。

また、地球の質量を  $M_e$ 、半径を  $R_e$  として

$$|\mathbf{f}| = G \frac{m M_e}{R_e^2} = mg$$

としたときの  $g$  が地球の重力加速度  $g = 9.8[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$  です。地球は質点ではないですが、質点とみなせることは下の補足で示しています。

「運動の法則」でのポテンシャルの話を万有引力として行います。まずは 1 次元で見ていきます。2 つの物体（質点） $A_1, A_2$  による系を考えます。 $x_2 > x_1$  として、物体  $A_1, A_2$  の運動方程式は

$$f_{12} = -f_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{(x_2 - x_1)^2}$$

から

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = f_{21}(x_1, x_2), \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f_{12}(x_1, x_2)$$

$f_{12}$  には  $x_1, x_2$  がいるので連立方程式です。運動方程式を解くことは省いて、この系の力学的エネルギー保存の式を求めます。

物体  $A_1$  では運動方程式を使って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_1^2 &= 2v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ m_1 \frac{d}{dt} v_1^2 &= 2v_1 m_1 \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{1}{2} m_1 \frac{d}{dt} v_1^2 &= f_{21} v_1 \end{aligned}$$

同様に物体  $A_2$  では

$$\frac{1}{2} m_2 \frac{d}{dt} v_2^2 = f_{12} v_2$$

二つを足して  $t$  で積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 \int dt \frac{d}{dt} v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \int dt \frac{d}{dt} v_2^2 &= \int dt (f_{21} v_1 + f_{12} v_2) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - T_0 &= \int dt (f_{21} v_1 + f_{12} v_2) \\ &= - \int dt (v_1 - v_2) f_{12} \end{aligned} \tag{1}$$

$T_0$  は積分定数です。左辺は物体  $A_1, A_2$  の運動エネルギーの和です。右辺では  $x_1, x_2$  による関数  $U(x_1, x_2)$  の時間微分は連鎖則から

$$\frac{dU(x_1, x_2)}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_2} = v_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2)$$

となることを利用すれば

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -f_{21}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -f_{12} \tag{2}$$

とでき、力  $f_{12}$  と  $U$  によるこのような関係があるとき、「運動の法則」でも触れたように  $f_{12}$  は保存力と呼ばれます。このときの  $U$  は  $f_{12}$  からすぐに分かるように（最後に触れている位置の積分によるポテンシャルの定義も参照）

$$U(x_1, x_2) = -\frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1}$$

$U$  の微分と  $f_{12}$  の対応をこのように選んでいるのは、運動方程式を

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

と書けるようにするためです。

というわけで

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{dx_1}{dt} f_{21} - \frac{dx_2}{dt} f_{12} = \frac{dx_1}{dt} f_{12} - \frac{dx_2}{dt} f_{12}$$

から

$$-\int dt(v_1 - v_2)f_{12} = -\int dt(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})f_{12} = -\int dt \frac{dU}{dt} = -U(x_1, x_2) + U_0$$

$U$  は  $x_1, x_2$  の関数なので最後の積分は  $U(x_1, x_2)$  になり、 $U_0$  は積分定数です。よって (1) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - T_0 &= -U(x_1, x_2) + U_0 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1} &= T_0 + U_0 \quad (x_2 > x_1) \end{aligned}$$

右辺は定数なので時間  $t$  で微分すれば 0 になることから、左辺の力学的エネルギーは時間と無関係な保存量です。これによって、物体  $A_1, A_2$  の運動における任意の  $x_1, x_2, v_1, v_2, x'_1, x'_2, v'_1, v'_2$  に対して

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}m_1v'_1^2 + \frac{1}{2}m_2v'_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{x'_2 - x'_1}$$

となります。

これが今の系での力学的エネルギー保存の式で、(2) を満たす  $U$  がいるので万有引力は保存力です（保存力であれば系の力学的エネルギーは保存される）。この結果で気を付ける点は、ポテンシャルの項が  $2U$  とならず  $U$  になることです。これから、ポテンシャルは物体  $A_1, A_2$  がそれぞれ持っているのではなく、共有していると言えます。

また、ポテンシャルは

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -f_{21}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -f_{12}$$

から分かるように、任意の定数  $C$  を含められ

$$U'(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) + C = -\frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1} + C$$

と書けます。積分で言えば

$$-\int dt \frac{dU}{dt} = -U(x_1, x_2) + C$$

と出てくる  $C$  です。後でもっとはっきりした形を示します。定数  $C$  が加わっても、力は変更されないので  $U'$  を使っても運動方程式(物体の運動)に影響しません。このようにポテンシャルには定数の任意性があり、その定数をどのように選ぶかで形は変わります。 $U' = U - C$  から、 $C$  をポテンシャルの基準と言ったりします(適当な条件で決めた  $C$  を基準にしたポテンシャル  $U'$ )。また、力学的エネルギー保存の式にも定数は影響しません。理由は簡単で、両辺に同じ定数が出てくるために、打ち消しあうからです。

よく出てくるのが、 $x_2 - x_1 = \infty$  (物体  $A_1, A_2$  が無限大に離れている) で  $U' = 0$  になるとしました。  
 $x_2 - x_1 = \infty$  で

$$U(x_1, x_2) = -\frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow 0$$

になるので、 $C = 0$  から  $U' = U$  になり余計な定数が出てこなくなります。この条件によって、 $x_2 - x_1 = \infty$  ではポテンシャルは 0 になることから、 $x_2 - x_1 = \infty$  での運動エネルギーを  $T$  とすれば、力学的エネルギー保存は

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{x_2 - x_1} = T \quad (x_2 > x_1)$$

と書けます。左辺は適当な  $x_1, x_2$  での力学的エネルギー、右辺は  $x_2 - x_1 = \infty$  での力学的エネルギーです。  
物体  $A_1$  は速度  $v_1 = 0$  で原点  $x_1 = 0$  にいるとき、 $x_2 = \infty$  において物体  $A_2$  の速度は  $v_2 = 0$  でポテンシャルは 0 という条件 ( $v_2 = 0$  は物体  $A_1$  から無限大に離れたところで物体  $A_2$  の初速度が 0 という初期条件) を入れれば

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{x_2} = 0$$

これは、原点に地球が固定されていると仮定して(もしくは地球の慣性系とする)、物体が地球に向かって落下しているときに使われます。この場合、 $m_1$  を地球の質量  $M_e$ 、地球の半径を  $R_e$  として、物体は地球表面にいるとき  $x_2 = R_e$  なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{GM_e m_2}{R_e} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \end{aligned}$$

となり、物体の地球の表面での速度が求まります。これは第二宇宙速度(escape velocity)と呼ばれ、地球から離脱するために必要な初速度です。大雑把には  $v_2 = 11[\text{km} \cdot \text{s}^{-1}]$  です。より一般的には、重力を持った物体から離脱するために必要な初速度を指します。

また、地球から高さ  $h \ll R_e$  にいる質量  $m$  の物体のポテンシャルは重力加速度  $g$  を使って

$$-\frac{GM_e m}{R_e + h} \simeq -\frac{GM_e m}{R_e} \left(1 - \frac{h}{R_e}\right) = -\frac{GM_e m}{R_e} + \frac{GM_e m}{R_e^2} h = -\frac{GM_e m}{R_e} + mgh$$

第一項を適当な基準によって消せば、よく出てくるポテンシャル  $mgh$  になります。

時間からも条件について見ておきます。状況をはっきりさせるために、(1) に戻って不定積分を別の定義

$$\int_{t_0}^t dt' f(t') \quad \left(\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' f(t') = f(t)\right)$$

に書き換えます。 $t_0$  は適当な固定された時間で、 $t$  は動かせる変数とします。そうすると

$$\frac{1}{2}m_1 \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2(t) + \frac{1}{2}m_2 v_2^2(t) - \frac{1}{2}m_1 v_1^2(t_0) - \frac{1}{2}m_2 v_2^2(t_0)$$

ポテンシャルは

$$-\int_{t_0}^t dt' \frac{dU}{dt'} = -U(t) + U(t_0)$$

$U$  は  $t$  そのものを変数に持っていないが (陽に依存していない)、位置  $x(t), x(t_0)$  でのポテンシャルという意味でこのように書いています。これらに対して、適当な時間  $t_0$  での条件を与えれば  $t_0$  の項 (定数) を決められます。条件は上の例で言えば、物体  $A_1$  は原点に固定して、 $t_0$  のとき  $x_2(t_0) = \infty, v_2(t_0) = 0$  でポテンシャルは 0 となります ( $U(t_0) = 0$ )。

3 次元に移ります。ベクトル成分の添え字との混同をなくすために、力を

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{f}_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -GmM \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

とし、物体  $A_1$  の位置は  $\mathbf{y}$ 、質量は  $M$ 、物体  $A_2$  の位置は  $\mathbf{x}$ 、質量は  $m$  とします。物体  $A_1$  の運動方程式は

$$M \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3), \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3))$$

物体  $A_2$  の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3))$$

1 次元と同じようにして

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} |\mathbf{V}|^2 &= M \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = 2M\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -2\mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \\ m \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 &= m \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

二つを足して  $t$  で積分して

$$\frac{1}{2} M |\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 - T_0 = \int dt (-\mathbf{V} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \tag{3}$$

左辺は運動エネルギーです。右辺は、今度も関数  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{dU(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_3} + \frac{dy_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{dy_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial y_2} + \frac{dy_3}{dt} \frac{\partial U}{\partial y_3} \\ &= -\frac{dx_1}{dt} f_1 - \frac{dx_2}{dt} f_2 - \frac{dx_3}{dt} f_3 + \frac{dy_1}{dt} f_1 + \frac{dy_2}{dt} f_2 + \frac{dy_3}{dt} f_3 \\ &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

となっていることを利用します。これから

$$\mathbf{f} = -\nabla_x U = \left( -\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial x_2}, -\frac{\partial U}{\partial x_3} \right), \mathbf{f} = \nabla_y U = \left( \frac{\partial U}{\partial y_1}, \frac{\partial U}{\partial y_2}, \frac{\partial U}{\partial y_3} \right)$$

なので、 $U$  は

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -GmM \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

と求まります。実際に

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_1} &= GmM \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = GmM \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} GmM \frac{2(x_1 - y_1)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}} \\ &= -GmM \frac{x_1 - y_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \\ &= f_1 \quad (\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)) \end{aligned}$$

他も同様なので

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\nabla_{\mathbf{x}} U = \left( -\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial x_2}, -\frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = \left( -GmM \frac{x_1 - y_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, -GmM \frac{x_2 - y_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, -GmM \frac{x_3 - y_3}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) \\ &= -GmM \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \end{aligned}$$

$\mathbf{y}$  でも同様で

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_1} &= -GmM \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -GmM \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}} \\ &= \frac{1}{2} GmM \frac{-2(x_1 - y_1)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}} \\ &= -GmM \frac{x_1 - y_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \\ &= f_1 \end{aligned}$$

となります。 $U$  を使えば運動方程式は

$$M \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{y}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

と書けます。

このように求めた  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  から (3) の右辺は

$$-\int dt (\mathbf{V} \cdot \mathbf{f} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) = -\int dt \frac{dU(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dt} = -U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U_0 \quad (4)$$

よって、(3) は力学的エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}M|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - GmM\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = T_0 + U_0$$

となり、3次元での万有引力のポテンシャルは

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -GmM\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_x U(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

となっています。

ここでは万有引力を使ってきましたが、一般的な性質になります。つまり、ある力  $\mathbf{F}(x)$  に対して

$$\mathbf{F}(x) = -\nabla U(x)$$

となる関数  $U(x)$  が存在していれば、力学的エネルギーの保存が成立します。このときの  $\mathbf{F}(x)$  は保存力と呼ばれます。また、 $\nabla$  の性質

$$\nabla \times \nabla A = 0$$

から

$$\nabla \times \mathbf{F}(x) = 0$$

であれば、 $\mathbf{F}(x)$  は保存力と言えます。

この性質は別の見方をすれば、(4) のように、時間  $t_0$  から  $t_1$  での積分によってポテンシャル  $U(x)$  が

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dU}{dt} = U(t_1) - U(t_0)$$

となっていることです。ここでも、ポテンシャルは正確には時間を変数に持ちませんが、時間  $t_1, t_0$  での位置  $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_0)$  でのポテンシャルとして書いています。この結果は、積分の両端での位置だけで積分結果が決まるこことを表します。このことをはっきりさせるために、時間の積分を物体の位置の積分に書き換えて ( $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ )

$$U(t_1) - U(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dU}{dt} = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla U = \int_b^a d\mathbf{x} \cdot \nabla U \quad (\mathbf{x}(t), d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt) \quad (5)$$

積分の両端は時間  $t_1, t_2$  での位置で与えられていて、 $a = \mathbf{x}(t_1)$ ,  $b = \mathbf{x}(t_0)$  と表記しています。 $x$  は運動方程式に従う軌道(曲線)で、最右辺はその軌道に沿った積分です(ポテンシャルは物体の運動に対して与えられているから)。 $U$  は

$$U(t_1) = U(a), \quad U(t_0) = U(b)$$

と表記しているので

$$\int_b^a d\mathbf{x} \cdot \nabla U = U(a) - U(b)$$

となります。もしくは、素直に  $U(x)$  の変化  $dU$  が

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3 = d\mathbf{x} \cdot \nabla U$$

であることを使っても求められます。この性質から、力  $\mathbf{F} = -\nabla U$  の積分結果が積分の両端にのみ依存しているとき、 $\mathbf{F}$  は保存力と定義することが多いです。これを線積分で言えば、両端は同じ位置  $a, b$  で、途中の経路が異なるっている経路  $C, C'$  に対して

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_{C'} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_b^a d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = -(U(a) - U(b))$$

となっているなら ( $d\mathbf{r}$  は経路上の微小な変位)、 $\mathbf{F}$  は保存力になるということです。これは  $\mathbf{F} = -\nabla U$  の積分形で、ポテンシャルの定義をこの形で与えることが多いです。力からポテンシャルを求めるにはこの積分を実行します。例えば 1 次元として、点  $x$  でのポテンシャルと言ったときは

$$-\int_{x_0}^x dx' F(x') = U(x) - U(x_0)$$

のように求めます。 $x_0$  は任意の基準点で、 $U(x_0)$  は定数でポテンシャルの基準です。

また、 $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$  の積分は経路に沿った力  $\mathbf{F}$  の仕事 (work) と定義されます。これを少し見ておきます。 $\mathbf{F}$  を保存力でないとします。運動方程式の変形は (5) と同じようにして

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \mathbf{F} \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 \right) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_0|^2 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \int_b^a d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

時間  $t_0$  での速度を  $\mathbf{v}_0$ 、 $a = \mathbf{x}(t_1)$ 、 $b = \mathbf{x}(t_0)$  とします。右辺は物体の微小な変位  $d\mathbf{x}$  と  $\mathbf{F}$  の内積の積分で、積分は物体の軌道上の線積分です。この右辺が仕事と定義され、位置  $b$  から  $a$  までの経路上で物体に作用する力  $\mathbf{F}$  による仕事と言われます。なので、仕事は経路に依存する量です。経路に依存していないときに  $\mathbf{F}$  は保存力となり、仕事の符号を反転させるとポテンシャルになります。そして、仕事は時間  $t_1$  と  $t_0$  での運動エネルギーの差に対応し、work-energy principle と呼ばれます。

#### ・補足

半径  $a$  の球は大きさを持つので質点ではないですが、半径  $a$  の外側の質点に作用する万有引力は球の全質量を持つ質点が球の中心にいるとした場合と同じになります。これを示します。

全質量  $M$  は、密度  $\rho(\mathbf{x})$  を使えば、半径  $a$  の球の領域  $V$  における 3 次元積分として

$$M = \int_V d^3 x \rho(\mathbf{x})$$

と与えられます。これは、球内の微小な 3 次元領域  $\Delta V$  の質量  $\rho(\mathbf{x})\Delta V$  を全て足し合わせれば全質量になると言っているだけです。 $\Delta V$  は極座標  $(r, \theta, \phi)$  では  $(\mathbf{r} = \mathbf{x})$ 、「円と球の積分」で示しているように

$$\Delta V = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi, \quad \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} \pi a^3$$

この微小な領域は十分質点と見なせるとし、その位置を  $\mathbf{r}$  として、球の外側の位置  $\mathbf{r}'$  ( $|\mathbf{r}'| > |\mathbf{r}|$ ) にいる質量  $m$  の質点に作用する万有引力は

$$\mathbf{f} = -G\rho\Delta V m \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}$$

なので、微小な領域のポテンシャルは

$$\Delta U = -G\rho\Delta V m \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$$

これを球全体で積分すれば、球のポテンシャルになります。ここで、球を構成しているので密度は極端な分布はしていないとして、 $r = |\mathbf{r}|$  にのみ依存するとします（十分薄い球殻内で密度が一定）。そうすると

$$\begin{aligned} U &= -Gm \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho(r)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \\ &= -2\pi Gm \int_0^a dr r^2 \rho(r) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}} \quad (r' = |\mathbf{r}'|) \end{aligned}$$

$\theta$  積分は

$$\begin{aligned} s &= r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta, \quad ds = 2r'r \sin \theta \\ s_\pm &= r'^2 + r^2 \pm 2r'r = (r' \pm r)^2 \end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned} U &= -2\pi Gm \int_0^a dr r^2 \frac{\rho(r)}{2r'r} \int_{s_-}^{s_+} ds \frac{1}{\sqrt{s}} \\ &= -2\pi Gm \int_0^a dr r^2 \frac{\rho(r)}{r'r} (\sqrt{s_+} - \sqrt{s_-}) \\ &= -2\pi Gm \int_0^a dr r^2 \frac{\rho(r)}{r'r} (r' + r - |r' - r|) \end{aligned}$$

$r' > r$  なので

$$U = -2\pi Gm \int_0^a dr r^2 \frac{\rho(r)}{r'r} (r' + r - r' + r) = -\frac{Gm}{r'} \int_0^a dr 4\pi r^2 \rho(r)$$

最右辺は

$$M = \int_V d^3x \rho(r) = \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) = \int_0^a dr 4\pi r^2 \rho(r)$$

と一致するので

$$U(r') = -\frac{GmM}{r'}$$

力は

$$F(r') = -\frac{GmM}{r'^2}$$

となり、質量  $M$  の質点による万有引力になります。というわけで、球の外側の質点に作用する万有引力は、球の中心に全質量が集まっているとした万有引力と同じです