回転座標系

ある固定された座標系に対して回転している座標系について見ていきます。
異なる状況で同じ $\boldsymbol{r}$ を使っているので混同しないようにしてください。
例として地球上での質点の落下を求めています。

3 次元デカルト座標とし、質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とします。原点を通る単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向を中心軸とする円運動をしているとして、$\boldsymbol{r}$ の時間変化を求めます。$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r} = (|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{r}|\sin\theta)\boldsymbol{s} \quad (0\leq\theta\leq\pi)$$

$$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{r}|\sin\theta = |\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

θ は $\boldsymbol{n}$ から $\boldsymbol{r}$ への角度、$\boldsymbol{s}$ は θ の方向に対して右ねじの方向の単位ベクトル ($\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ による平面に垂直) です。例えば、$\boldsymbol{n}$ を z 軸、$\boldsymbol{r}$ を y 軸上のベクトルとすれば、$\boldsymbol{s}$ は $-x$ 方向です。$\boldsymbol{s}$ を質点の進行方向とし、微小な回転角度を $\Delta\phi$ とすれば、$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}|$ は回転軸と $\boldsymbol{r}$ の間の距離なので、$\boldsymbol{r}$ の微小変化は

$$\boldsymbol{s}|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}|\Delta\phi = \boldsymbol{s}|\boldsymbol{r}|\sin\theta\Delta\phi = \boldsymbol{s}|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{r}|\sin\theta\Delta\phi = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\Delta\phi$$

よって、微小時間経過した $\boldsymbol{r}'$ は

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\Delta\phi \quad (\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}\ ,\ |\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}|\Delta\phi)$$

$\boldsymbol{r}'$ の時間を $t+\Delta t$、$\boldsymbol{r}$ の時間を t として、微小な時間間隔 Δt でわれば

$$\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{\Delta t} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Δt の 0 の極限を取って

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\frac{d\phi}{dt} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\omega = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \quad (\frac{d\phi}{dt}\boldsymbol{n} = \omega\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\omega}) \tag{1}$$

ω は角速度です。$\boldsymbol{\omega}$ は回転方向でなく、中心軸の方向になっていることに注意してください。これを別の視点から見ていきます。

質点が動いて回転しているとして求めましたが、座標軸が回転しているとして求めます。x_1, x_2, x_3 軸によるデカルト座標とし、その基底を $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$ とします。x_3 軸を回転軸として、$\boldsymbol{e}_i$ から回転している基底を $\boldsymbol{e}'_i$ とします。$\boldsymbol{e}_i$ が時間変化しているとして書けば、$\boldsymbol{e}_i(0) = \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i(t) = \boldsymbol{e}'_i$ ということです。座標軸の回転は質点の運動に合わせているとして、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{e}'_i$ と一緒に回転するとします。なので、$\boldsymbol{e}'_i$ による線形結合で書いたときの $\boldsymbol{r}$ の成分 r'_i は定数です。

$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}'_i$ は 2 次元極座標での関係そのままなので

$$\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}_1\cos\phi+\boldsymbol{e}_2\sin\phi\ ,\ \boldsymbol{e}'_2=-\boldsymbol{e}_1\sin\phi+\boldsymbol{e}_2\cos\phi\ ,\ \boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}_3$$

ϕ は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}'_1$ の間の角度です。回転しているので $\boldsymbol{e}'_i$ は時間依存し、それは角度 ϕ によるので、$\boldsymbol{e}'_i$ の時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt}&=-\boldsymbol{e}_1\frac{d\phi}{dt}\sin\phi(t)+\boldsymbol{e}_2\frac{d\phi}{dt}\cos\phi(t)=\omega\boldsymbol{e}'_2\\
\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt}&=\boldsymbol{e}_1\frac{d\phi}{dt}\cos\phi(t)-\boldsymbol{e}_2\frac{d\phi}{dt}\sin\phi(t)=-\omega\boldsymbol{e}'_1\\
\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt}&=0
\end{aligned}\tag{2}$$

質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{e}'_i$ で書くと

$$\boldsymbol{r}=r'_1\boldsymbol{e}'_1+r'_2\boldsymbol{e}'_2+r'_3\boldsymbol{e}'_3$$

r'_i は定数なので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=r'_1\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt}+r'_2\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt}+r'_3\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt}=r'_1\omega\boldsymbol{e}'_2-r'_2\omega\boldsymbol{e}'_1$$

これは回転軸の方向 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}'_3$ を使って

$$\omega\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{r}=\omega\boldsymbol{e}'_3\times(r'_1\boldsymbol{e}'_1+r'_2\boldsymbol{e}'_2+r'_3\boldsymbol{e}'_3)=\omega r'_1\boldsymbol{e}'_2-\omega r'_2\boldsymbol{e}'_1=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\tag{3}$$

と書けるので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\qquad(\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_3)\tag{4}$$

となり、(1) と同じ結果が求まります。また、直交基底のベクトル積は

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\ ,\ \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2\ ,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\ ,\ \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=0$$

となっています。

座標軸の回転からも同じ結果になったので、このまま運動方程式を求めます。(4) を微分して

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

もしくは、基底の微分が

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{e}'_1}{dt^2} &= \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \omega\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_2 - \omega^2\boldsymbol{e}'_1 \\
\frac{d^2\boldsymbol{e}'_2}{dt^2} &= -\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_1 - \omega\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_1 - \omega^2\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}
$$

となっているので

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = r'_1\frac{d^2\boldsymbol{e}'_1}{dt^2} + r'_2\frac{d^2\boldsymbol{e}'_2}{dt^2} &= r'_1\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_2 - r'_1\omega^2\boldsymbol{e}'_1 - r'_2\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_1 - r'_2\omega^2\boldsymbol{e}'_2 \\
&= r'_1\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_2 - r'_2\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_1 - r'_1\omega^2\boldsymbol{e}'_1 - r'_2\omega^2\boldsymbol{e}'_2
\end{aligned}
$$

第 1 項と第 2 項は (3)、第 3 項と第 4 項は

$$
\boldsymbol{e}'_3 \times (\boldsymbol{e}'_3 \times (r'_1\boldsymbol{e}'_1 + r'_2\boldsymbol{e}'_2 + r'_3\boldsymbol{e}'_3) = \boldsymbol{e}'_3 \times (r'_1\boldsymbol{e}'_2 - r'_2\boldsymbol{e}'_1) = -r'_1\boldsymbol{e}'_1 - r'_2\boldsymbol{e}'_2
$$

と書けるので

$$
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}(r'_1\boldsymbol{e}'_2 - r'_2\boldsymbol{e}'_1) + \omega^2(-r'_1\boldsymbol{e}'_1 - r'_2\boldsymbol{e}'_2) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad (\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_3) \tag{5}
$$

と求まります。

よって、x_3 軸周りで円運動している質量 m の質点 (r'_i が定数) の運動方程式は

$$
m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{6}
$$

右辺の第 1 項は角速度が加速しているときに生じる力です。第 2 項は、r_i と r'_i は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \sum_{i=1}^{3} r'_i\boldsymbol{e}'_i \\
&= r'_1(\boldsymbol{e}_1\cos\phi + \boldsymbol{e}_2\sin\phi) + r'_2(-\boldsymbol{e}_1\sin\phi + \boldsymbol{e}_2\cos\phi) + r'_3\boldsymbol{e}'_3 \\
&= r'_1\boldsymbol{e}_1\cos\phi - r'_2\boldsymbol{e}_1\sin\phi + r'_1\boldsymbol{e}_2\sin\phi + r'_2\boldsymbol{e}_2\cos\phi + r_3\boldsymbol{e}_3 \\
&= (r'_1\cos\phi - r'_2\sin\phi)\boldsymbol{e}_1 + (r'_1\sin\phi + r'_2\cos\phi)\boldsymbol{e}_2 + r_3\boldsymbol{e}_3 \\
&= r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + r_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

から

$$r_1 = r_1' \cos\phi - r_2' \sin\phi\ ,\ r_2 = r_1' \sin\phi + r_2' \cos\phi\ ,\ r_3 = r_3'$$

となっていることを使うと

$$\begin{aligned}
-\omega^2(r_1'\boldsymbol{e}_1' + r_2'\boldsymbol{e}_2') &= -\omega^2 r_1'(\boldsymbol{e}_1\cos\phi + \boldsymbol{e}_2\sin\phi) - \omega^2 r_2'(-\boldsymbol{e}_1\sin\phi + \boldsymbol{e}_2\cos\phi) \\
&= \omega^2(-r_1'\cos\phi + r_2'\sin\phi)\boldsymbol{e}_1 - \omega^2(r_1'\sin\phi + r_2'\cos\phi)\boldsymbol{e}_2 \\
&= -\omega^2 r_1\boldsymbol{e}_1 - \omega^2 r_2\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

これだけを取り出したときの運動方程式は

$$m\frac{d^2r_1}{dt^2} = -m\omega^2 r_1\ ,\ m\frac{d^2r_2}{dt^2} = -m\omega^2 r_2$$

となり、単振動と同じ式です。そして、r_1, r_2 は

$$r_1 = r\cos\phi\ ,\ r_2 = r\sin\phi \quad (r = |\boldsymbol{r}|)$$

なので、$\phi = \omega t$ です。というわけで、ϕ が定数なら質点は半径 r の円上で等速円運動するので、(6) の第 2 項は等速円運動の向心力 (円の中心に向かう力) に対応します。

(6) を解けば運動が求まるのでそれで話は終わっていますが、別の視点から見ます。回転している基底を使って質点の運動方程式を作りましたが、今度はその回転している座標系から運動する質点を見ているとするとどうなるのかを考えます。その座標系を S' とし、基底 $\boldsymbol{g}_i$ は固定されているとします。質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}^{(S')}$ として

$$\frac{d\boldsymbol{r}^{(S')}}{dt} = \frac{dr_1^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_1 + \frac{dr_2^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_2 + \frac{dr_3^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_3$$

基底は固定されているので時間微分で 0 です。S' にいる観測者からは質点が止まって見えると設定することにして

$$\frac{d\boldsymbol{r}^{(S')}}{dt} = \frac{dr_1^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_1 + \frac{dr_2^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_2 + \frac{dr_3^{(S')}}{dt}\boldsymbol{g}_3 = 0 \tag{7}$$

一方で、S' と原点は同じで、質点が x_3 軸周りで円運動して見える座標系があるとし、それを S とします。S は今まで使ってきた座標系です。そうすると、S の観測者から見た S' の基底は $\boldsymbol{e}_i(t) = \boldsymbol{e}_i'$ で、その観測者からすれば

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}^{(S')} = r_1'\boldsymbol{e}_1' + r_2'\boldsymbol{e}_2' + r_3'\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{r} \\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr_1'}{dt}\boldsymbol{e}_1' + \frac{dr_2'}{dt}\boldsymbol{e}_2' + \frac{dr_3'}{dt}\boldsymbol{e}_3' + r_1'\frac{d\boldsymbol{e}_1'}{dt} + r_2'\frac{d\boldsymbol{e}_2'}{dt} + r_3'\frac{d\boldsymbol{e}_3'}{dt} = \sum_{i=1}^{3} r_i'\frac{d\boldsymbol{e}_i'}{dt}
\end{aligned}$$

第 3 項までが消えることは (7) に対応します。これは、(7) は S からの座標変換で S' のベクトルを書けば

$$\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_1+\frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_2+\frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_3=0$$

となるというだけです。この微分は S' での位置ベクトルの微分に対応するので、$\boldsymbol{e}'_i$ を定数扱いにする微分として

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'}=\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_1+\frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_2+\frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_3$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}|_{S'}=\frac{d^2r'_1}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1+\frac{d^2r'_2}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2+\frac{d^2r'_3}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3$$

と表記します。$\boldsymbol{e}'_i$ は時間依存しているので、$d\boldsymbol{r}/dt,\ d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ とは異なることに注意してください。

この微分によって、S と S' での質点に作用している力を繋げます。(4) と (5) で、これらを 0 にせずに残したままにすると

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'}+r'_1\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt}+r'_2\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt}+r'_3\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}|_{S'}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

そうすると、S で作用している力を $\boldsymbol{F}(S)$ とすれば

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(S)$$

なので

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}|_{S'}=\boldsymbol{F}(S)-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

として、運動方程式の形になります ((6) を変形しただけ)。そうすると、今の場合では右辺は 0 なので、力が作用してなく質点は止まっていると言えます。これは S' で設定した結果になっています。このため、左辺の微分を S' での微分と見なすことで、S' での運動方程式になっていると言えます。S' での微分に対応することは感覚的に言えば、$\boldsymbol{e}'_i$ が定数に見える座標系が S' だからです。

ちなみに、第 2 項は

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}=\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{r}$$

なので、基底に微分が作用しないという意味では

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}|_{S'}$$

と書けます。

このようにして S' での力を与えているのは、観測者が座標軸と一緒に回転すると加速度が存在するために、S' は慣性系にならないからです (簡単に言えば、等速直線運動を回転しながら見たら等速直線運動にならないから)。運動方程式は慣性系で成立すると仮定されているために非慣性系には直接使えないので、慣性系である S を経由して作ったということです。その結果として、座標軸の回転による影響が右辺の第 2 項と第 3 項に現れ、それらが $\boldsymbol{F}(S)$ と合わさることで非慣性系 S' で運動方程式が成立しています (今は質点が止まっているときの運動方程式になる)。

このような関係から、右辺の第 2 項と第 3 項は、S から見える力 $\boldsymbol{F}(S)$ と S' から見える力を繋ぐための数式上の力と言えて、S' の観測者からすれば存在しない仮想的な力です。また、今行ったのは $\boldsymbol{r}$ を基底 $\boldsymbol{e}'_i$ で書いて式変形しただけなので、S' の運動方程式という解釈は 2 次的な結果とも言えます (そのような解釈をしなくても微分方程式を解いてしまえば運動が分かるから)。

次に、質点が座標軸の回転に対応する運動になっていない場合を求めます。このときは S' から見ても質点は動いています。座標軸が回転していても位置が変わるので、$\boldsymbol{e}'_i$ の線形結合で書いたときの成分 r_i も時間依存させることになり

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_3 + r'_1\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} + r'_2\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} + r'_3\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt}$$

(4) から

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\frac{dr'_i}{dt}\boldsymbol{e}'_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

もう 1 回微分すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d^2r'_1}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d^2r'_2}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d^2r'_3}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3 + \frac{dr'_1}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} + \frac{dr'_2}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} + \frac{dr'_3}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} \\
&\quad + \frac{dr'_1}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} + \frac{dr'_2}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} + \frac{dr'_3}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} + r'_1\frac{d^2\boldsymbol{e}'_1}{dt^2} + r'_2\frac{d^2\boldsymbol{e}'_2}{dt^2} + r'_3\frac{d^2\boldsymbol{e}'_3}{dt^2} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\frac{d^2r'_i}{dt^2}\boldsymbol{e}'_i + 2\sum_{i=1}^{3}\frac{dr'_i}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3}r'_i\frac{d^2\boldsymbol{e}'_i}{dt^2}
\end{aligned}$$

第 2 項は (2) から

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\frac{dr'_i}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}'_i}{dt} = \omega\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_2 - \omega\frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_1 &= \omega(\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_2) \\
&= \omega\boldsymbol{e}'_3\times(\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_3) \\
&= \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'}
\end{aligned}$$

第 3 項は (6) なので、運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\sum_{i=1}^{3}\frac{d^2r'_i}{dt^2}\boldsymbol{e}'_i + 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'} + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

これが、S' から見ても質点が動いているときの運動方程式になります。任意の軸周りで回転してるときも見た目は同じ式になります (下の補足参照)。S' での運動方程式の形にするために第 1 項を S' の微分で書けば

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}|_{S'} + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} + 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

なので

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}|_{S'} = \boldsymbol{F}(S) - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|_{S'} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad (\boldsymbol{F}(S) = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2})$$

右辺が S' から見た質点に作用している力で、右辺第 3 項はコリオリ力 (Coriolis force)、第 4 項は遠心力 (centrifugal force) と呼ばれます (第 2 項には特定の名称がついていない)。このときも $\boldsymbol{F}(S)$ から回転による影響を引いたものが S' での力になっています。また、コリオリ力は回転軸と $d\boldsymbol{r}/dt$ による面に垂直です。

座標系の設定をまとめておきます。ある慣性系において固定された基底 $\boldsymbol{e}_i$ による座標系を S、S に対して任意の軸周りで回転している座標系を S' とします。S' の基底は固定された基底 $\boldsymbol{e}'_i(S')$ で与えます。S から見た S' の基底 $\boldsymbol{e}'_i(S)$ は時間依存し、S' での基底 $\boldsymbol{e}'_i(S')$ は時間依存しません (S' の観測者からすれば座標軸は固定されたまま)。このように、ある固定された座標系に対して回転している座標系を回転座標系 (rotating coordinate system, rotating frame) と言います。単純な例は、最初に見た座標軸を中心に円運動している質点が止まって見える座標系です。

例として、地球での質点の落下を求めます。地球の中心を原点とするデカルト座標を用意し、この座標系を S とし、地球は S の x_3 軸周りで自転しているとします。中心から地球表面へのベクトルを $\boldsymbol{R}$ とし、その位置を原点とする座標系を S' とします。S から見て、S' は原点から $\boldsymbol{R}$ の地点で x_3 軸周りで回転している回転座標系です。S' での運動方程式を作り、その解を求めます。

今までは原点を一致させていたので、新しく $\boldsymbol{R}$ による影響を加わります。これをまずは求めます。質点の位置を S では $\boldsymbol{r}$、S' では $\boldsymbol{r}'$ とし、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{r}' \ll \boldsymbol{R}$) とします。そうすると

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}$$

右辺の第 1 項は上で使ってきた $\boldsymbol{r}$ と同じなので (8)、第 2 項の $\boldsymbol{R}$ は円運動と同じなので (6) に対応し

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}|_{S'} + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' + 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{R} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})$$

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}|_{S'} = \boldsymbol{F}(S) - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{R} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}) - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' - 2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{9}$$

これが地球の重力で落下している質点を地表 (S') から見たときの運動方程式です。解くために近似していきます。

S から見た質点には重力しか作用していないので、地球の質量を M、重力定数を G として

$$\boldsymbol{F}(S) = -G\frac{mM}{R^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \simeq -G\frac{mM}{R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R} \quad (\boldsymbol{r} \simeq \boldsymbol{R})$$

(9) の右辺第 2 項と $\boldsymbol{F}(S)$ を合わせて

$$\boldsymbol{g} = -G\frac{mM}{R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$$

として、重力に遠心力を含めたものとして重力加速度を与えます。ただし、第 2 項は

$$-\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{e}_3 \times (R_1\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2 + R\boldsymbol{e}_3)) = -\boldsymbol{e}_3 \times (R_1\boldsymbol{e}_2 - R_2\boldsymbol{e}_1) = R_1\boldsymbol{e}_1 + R_2\boldsymbol{e}_2$$

となるので、$\boldsymbol{R}$ 方向を向いてません。質量を省いた遠心力の大きさは

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})| = \omega^2|R_1\boldsymbol{e}_1 + R_2\boldsymbol{e}_2| = \omega^2\sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \omega^2 R\sin\theta$$

地球の自転での ω は、2π を 1 日で割ればいいので

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \simeq 7.3 \times 10^{-5}[\mathrm{s}^{-1}]$$

地球の半径は $R \simeq 6.37 \times 10^6[\mathrm{m}]$ なので

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})| \simeq 0.034\sin\theta[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}]$$

これに対して重力部分は、$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}[\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}],\ M \simeq 5.97 \times 10^{24}[\mathrm{kg}]$ から

$$G\frac{M}{R^2} \simeq 9.8[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}]$$

なので、遠心力はほとんど寄与しません。このことから、$\boldsymbol{g}$ は $-\boldsymbol{R}$ 方向を向いているとします。

$m\boldsymbol{g}$ に置き換えて

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}|_{S'} = m\boldsymbol{g} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

ω^2 は十分小さいので無視し、地球の自転は非常に遅くほぼ一定なので $d\omega/dt \simeq 0$ とすれば

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}|_{S'} = m\boldsymbol{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'}$$

自由落下の式に、コリオリ力が加わっています。これの解を求めます。

$\boldsymbol{R}$ の位置を原点とし、S から見た S' の基底を極座標のように、$\boldsymbol{e}'_1$ を θ 方向、$\boldsymbol{e}'_2$ を ϕ 方向、$\boldsymbol{e}'_3$ を $\boldsymbol{R}$ 方向に取ります。θ は x_3 軸から $\boldsymbol{R}$ への角度、ϕ は自転方向の角度です。このように取ると、極座標の関係から

$$\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}'_1 \sin\theta + \boldsymbol{e}'_3 \cos\theta$$

これによって

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_3 \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'} &= \boldsymbol{e}_3 \times \sum_{i=1}^{3} \frac{dr'_i}{dt}\boldsymbol{e}'_i \\
&= (-\boldsymbol{e}'_1 \sin\theta + \boldsymbol{e}'_3 \cos\theta) \times (\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_3) \\
&= \sin\theta(-\frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2 - \frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_3) + \cos\theta(\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_3 \times \boldsymbol{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_3 \times \boldsymbol{e}'_2) \\
&= \sin\theta(-\frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_3 + \frac{dr'_3}{dt}\boldsymbol{e}'_2) + \cos\theta(\frac{dr'_1}{dt}\boldsymbol{e}'_2 - \frac{dr'_2}{dt}\boldsymbol{e}'_1) \\
&= -\frac{dr'_2}{dt}\cos\theta\boldsymbol{e}'_1 + (\frac{dr'_1}{dt}\cos\theta + \frac{dr'_3}{dt}\sin\theta)\boldsymbol{e}'_2 - \frac{dr'_2}{dt}\sin\theta\boldsymbol{e}'_3
\end{aligned}$$

となるので

$$2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}|_{S'} = -2m\omega\frac{dr'_2}{dt}\cos\theta\boldsymbol{e}'_1 + 2m\omega(\frac{dr'_1}{dt}\cos\theta + \frac{dr'_3}{dt}\sin\theta)\boldsymbol{e}'_2 - 2m\omega\frac{dr'_2}{dt}\sin\theta\boldsymbol{e}'_3$$

よって、運動方程式を成分で分けると

$$m\frac{d^2r'_1}{dt^2} = 2m\omega\frac{dr'_2}{dt}\cos\theta \tag{10a}$$

$$m\frac{d^2r'_2}{dt^2} = -2m\omega(\frac{dr'_1}{dt}\cos\theta + \frac{dr'_3}{dt}\sin\theta) \tag{10b}$$

$$m\frac{d^2r'_3}{dt^2} = -mg + 2m\omega\frac{dr'_2}{dt}\sin\theta \tag{10c}$$

自転方向しか変化しないので、θ は定数です（観測者の緯度 $\pi/2-\theta$ は変わらない)。ちなみに、dr'_i/dt をそれぞれにかけて

$$\begin{aligned}
m\frac{dr'_1}{dt}\frac{d^2r'_1}{dt^2} &= 2m\omega\frac{dr'_1}{dt}\frac{dr'_2}{dt}\cos\theta \\
m\frac{dr'_2}{dt}\frac{d^2r'_2}{dt^2} &= -2m\omega(\frac{dr'_1}{dt}\frac{dr'_2}{dt}\cos\theta + \frac{dr'_2}{dt}\frac{dr'_3}{dt}\sin\theta) \\
m\frac{dr'_3}{dt}\frac{d^2r'_3}{dt^2} &= -mg\frac{dr'_3}{dt} + 2m\omega\frac{dr'_2}{dt}\frac{dr'_3}{dt}\sin\theta
\end{aligned}$$

これらを足すと

$$
\begin{aligned}
m\frac{dr'_1}{dt}\frac{d^2r'_1}{dt^2}+m\frac{dr'_2}{dt}\frac{d^2r'_2}{dt^2}+m\frac{dr'_3}{dt}\frac{d^2r'_3}{dt^2} &= -mg\frac{dr'_3}{dt}\\
\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}((\frac{dr'_1}{dt})^2+(\frac{dr'_2}{dt})^2+(\frac{dr'_3}{dt})^2) &= \frac{d}{dt}(-mgr'_3)\\
\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}(\frac{dr'_i}{dt})^2+mgr'_3=const
\end{aligned}
$$

として、mgr'_3 をポテンシャルとするエネルギー保存則が出てきます。これから、運動方程式にいるコリオリ力はエネルギー保存に寄与しないのが分かります。これは、コリオリ力が質点の進行方向 $d\boldsymbol{r}'/dt$ に直交するためにポテンシャルに影響しないことに対応します。

運動方程式の解を求めます。単純に積分して

$$
\begin{aligned}
\frac{dr'_1}{dt} &= 2\omega r'_2\cos\theta+C_1\\
\frac{dr'_2}{dt} &= -2\omega(r'_1\cos\theta+r'_3\sin\theta)+C_2\\
\frac{dr'_3}{dt} &= -gt+2\omega r'_2\sin\theta+C_3
\end{aligned}
$$

C_1, C_2, C_3 は積分定数です。これらを (10b) に入れれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2r'_2}{dt^2} &= -2\omega\frac{dr'_1}{dt}\cos\theta-2\omega\frac{dr'_3}{dt}\sin\theta\\
&= -2\omega(2\omega r'_2\cos\theta+C_1)\cos\theta-2\omega(-gt+2\omega r'_2\sin\theta+C_3)\sin\theta\\
&= -4\omega^2r'_2\cos^2\theta+2\omega gt\sin\theta-4\omega^2r'_2\sin^2\theta+C'_1+C'_3\quad (C'_1=-2\omega C_1\cos\theta\ ,\ C'_3=-2\omega C_3\sin\theta)\\
&= -4\omega^2r'_2+2\omega gt\sin\theta+C'_1+C'_3
\end{aligned}
$$

非同次 2 階微分方程式なので、同次での一般解と非同次での特解を足せば解になります。同次のときは

$$
\frac{d^2f}{dt^2}=-4\omega^2f
$$

これは単振動の式なので、任意定数を A_1, A_2 として、一般解は

$$
f=A_1\sin(2\omega t)+A_2\cos(2\omega t)
$$

非同次での特解は 2 回微分したら消えるように作ればいいだけで

$$
r'_2=\frac{2g\omega\sin\theta}{4\omega^2}t+\frac{1}{4\omega^2}(C'_1+C'_3)
$$

よって、一般解は

$$r_2' = \frac{g\sin\theta}{2\omega}t + A_1\sin(2\omega t) + A_2\cos(2\omega t) + \frac{1}{4\omega^2}(C_1' + C_3')$$

後は (10a),(10c) にこれを入れれば、残りが求まります。

任意定数が残ったままだと計算が面倒なので、ここで初期条件を入れてしまいます。初期条件は $t=0$ で

$$r_1(0) = r_2(0) = 0\ ,\ r_3(0) = h$$
$$\frac{dr_1'}{dt}|_{t=0} = \frac{dr_2'}{dt}|_{t=0} = \frac{dr_3'}{dt}|_{t=0} = 0$$

と与えます。これは S' から見て、$t=0$ のとき質点は高さ h で止まっているという条件です。このため、固定されている S から見た質点はまっすぐに落下してきません。C_1, C_2, C_3 は初期条件から

$$\frac{dr_1'}{dt}|_{t=0} = C_1 = 0$$
$$\frac{dr_2'}{dt}|_{t=0} = -2\omega r_3'(0)\sin\theta + C_2 = 0\ \Rightarrow\ C_2 = 2\omega h\sin\theta$$
$$\frac{d^2r_3'}{dt^2}|_{t=0} = C_3 = 0$$

A_1, A_2 は

$$r_2'(0) = A_2 = 0$$
$$\frac{dr_2'}{dt}|_{t=0} = \frac{g\sin\theta}{2\omega} + 2\omega A_1 = 0\ \Rightarrow\ A_1 = -\frac{g\sin\theta}{4\omega^2}$$

となり、r_2' は

$$r_2' = \frac{g\sin\theta}{2\omega}(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)) \tag{11}$$

(10a) に入れて、積分すると

$$\begin{aligned}
\frac{dr_1'}{dt} &= 2\omega r_2'\cos\theta \\
&= 2\omega\frac{g\sin\theta}{2\omega}(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t))\cos\theta \\
&= g(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t))\sin\theta\cos\theta \\
r_1' &= g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t))\sin\theta\cos\theta + C
\end{aligned}$$

C は積分定数です。初期条件から

$$r_1'(0) = g\frac{1}{4\omega^2}\sin\theta\cos\theta + C = 0 \ \Rightarrow\ C = -\frac{g}{4\omega^2}\sin\theta\cos\theta$$

なので

$$r_1' = g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{4\omega^2})\sin\theta\cos\theta = g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2})\sin\theta\cos\theta$$

(10c) にも (11) を入れて

$$\begin{aligned}
\frac{dr_3'}{dt} &= -gt + 2\omega r_2'\sin\theta \\
&= -gt + g(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t))\sin^2\theta \\
r_3' &= -\frac{1}{2}gt^2 + g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t))\sin^2\theta + C
\end{aligned}$$

初期条件から

$$r_3'(0) = \frac{g}{4\omega^2}\sin^2\theta + C = h \ \Rightarrow\ C = h - \frac{g}{4\omega^2}\sin^2\theta$$

なので

$$\begin{aligned}
r_3' &= -\frac{1}{2}gt^2 + g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t))\sin^2\theta + h - \frac{g}{4\omega^2}\sin^2\theta \\
&= h - \frac{1}{2}gt^2 + g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2})\sin^2\theta
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
r_1' &= g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2})\sin\theta\cos\theta \\
r_2' &= \frac{g\sin\theta}{2\omega}(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)) \\
r_3' &= h - \frac{1}{2}gt^2 + g(\frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2})\sin^2\theta
\end{aligned}$$

このように、回転の影響を受けた落下をします。影響を簡単に見積ります。ω は十分小さいので

$$\sin(2\omega t) \simeq 2\omega t - \frac{1}{6}(2\omega t)^3\ ,\ \cos(2\omega t) \simeq 1 - \frac{1}{2}(2\omega t)^2 + \frac{1}{24}(2\omega t)^4$$

として

$$
\begin{aligned}
r_1' &\simeq g(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}\omega^2 t^4)\sin\theta\cos\theta = \frac{g\sin\theta\cos\theta}{6}\omega^2 t^4 \\
r_2' &\simeq \frac{g\sin\theta}{2\omega}(t - t + \frac{1}{12}8\omega^2 t^3) = \frac{g\sin\theta}{3}\omega t^3 \\
r_3' &\simeq h - \frac{1}{2}gt^2 + g(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}\omega^2 t^4)\sin^2\theta = h - \frac{1}{2}gt^2(1 - \frac{\sin^2\theta}{3}\omega^2 t^2)
\end{aligned}
$$

ω^2 の項は無視して

$$
\begin{aligned}
r_1' &\simeq 0 \\
r_2' &\simeq \frac{g\sin\theta}{3}\omega t^3 \\
r_3' &\simeq h - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

r_3' は自由落下の式になっていますが、r_2' が 0 になっていません。このため、地球で建物から物体を落下させると、$\boldsymbol{e}_2'$ 方向 (地表の観測者からしたら東) にズレます。緯度によりますが、高さ 100[m] の建物から落とすと 1[cm] 程度ズレます。また、落下でなく上空に進む場合は $-\boldsymbol{e}_2'$ 方向にズレます (コリオリ力が逆向きになるから)。

このズレの理由を S から見ます。S' での質点は $t=0$ では $r_3' = h$ で止まっているとしたことと、ω が小さいとして求めたことから、近似的に質点は $\boldsymbol{e}_3'$ 軸に沿って落下して見えるとします。これを S から見ると、$\boldsymbol{R}$ の延長上で自転に合わせながら質点は落下しています。このときの質点の $\boldsymbol{e}_2'$ 方向 (自転方向) の速度は、ω に質点の x_1x_2 平面上の距離をかけたものなので

$$
\omega(|\boldsymbol{R}| + h - \frac{1}{2}gt^2)\sin\theta
$$

S から見た地表の観測者 (S' の原点) の速度は $\omega|\boldsymbol{R}|\sin\theta$ なので、地表に到達する時間を T とすれば、質点と観測者の移動距離の差は

$$
\int_0^T dt\ \omega(|\boldsymbol{R}| + h - \frac{1}{2}gt^2)\sin\theta - \omega|\boldsymbol{R}|T\sin\theta = \omega(hT - \frac{1}{6}gT^3)\sin\theta
$$

h は $gT^2/2$ なので

$$
\omega(hT - \frac{1}{6}gT^3)\sin\theta = \frac{g\sin\theta}{3}\omega T^3
$$

となり、同じ結果になります。というわけで、質点の速度のほうが速いためにズレが生じています。

・補足

任意の回転軸とした場合を求めます。時間依存する直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とします。これらの時間微分もベクトルなので、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の線形結合で

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i\ ,\ \ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=\sum_{i=1}^{3}b_i\boldsymbol{e}_i\ ,\ \ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}=\sum_{i=1}^{3}c_i\boldsymbol{e}_i$$

単位ベクトルの内積は 1 なので、$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i$ を微分すれば 0 になることから

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i)=\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=2\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i=0\ \Rightarrow\ \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_i=0$$

このように、もとの単位ベクトルと直交します。また、$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0\ (i\neq j)$ から

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt}=0\ \Rightarrow\ \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_j=-\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt} \tag{12}$$

そうすると

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}&=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}&=a_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3\\ 0&=a_1\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{13a}$$

他の場合も同様で

$$\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_3\boldsymbol{e}_3 \tag{13b}$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2 \tag{13c}$$

(13a) と $\boldsymbol{e}_2$ の内積を取ると

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=a_2$$

(13b) と $\boldsymbol{e}_1$ の内積を取ると

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=b_1$$

これらと (12) から、$a_2=-b_1$ となります。同様にしていくと

$$a_2=-b_1\ ,\ a_3=-c_1\ ,\ b_3=-c_2$$

これらによって、基底の微分は

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}=a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\ ,\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}=-a_2\boldsymbol{e}_1+b_3\boldsymbol{e}_3\ ,\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}=-a_3\boldsymbol{e}_1-b_3\boldsymbol{e}_2$$

となります。
　a_2 を C_3、a_3 を $-C_2$、b_3 を C_1 として、これらから

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}&=A_1(C_3\boldsymbol{e}_2-C_2\boldsymbol{e}_3)+A_2(-C_3\boldsymbol{e}_1+C_1\boldsymbol{e}_3)+A_3(C_2\boldsymbol{e}_1-C_1\boldsymbol{e}_2)\\&=(C_2A_3-C_3A_2)\boldsymbol{e}_1+(C_3A_1-C_1A_3)\boldsymbol{e}_2+(C_1A_2-C_2A_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

$\boldsymbol{C}$ を

$$\boldsymbol{C}=\sum_{i=1}^{3}C_i\boldsymbol{e}_i$$

とすれば

$$\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$$

同様に

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{C}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i)$$

よって、$\boldsymbol{A}$ の微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{d^2A_i}{dt^2}\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{3}\frac{d^2A_i}{dt^2}\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{C}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i)+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

回転軸の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として、$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$ とすれば

$$\frac{d\boldsymbol{C}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{n}$$

なので

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{3}A_i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

２回微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{3}\frac{d^2A_i}{dt^2}\boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i) + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\frac{d^2A_i}{dt^2}\boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{A} + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\frac{d^2A_i}{dt^2}\boldsymbol{e}_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{A} + 2\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}\times(\frac{dA_i}{dt}\boldsymbol{e}_i) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

よって、任意の回転軸で (8) になります。