

ラザフォード散乱

電荷を使うので力学より電磁気や原子とかでの話ですが、力学の本に散乱の例としてよく載っているのも、力学のくくりの中で見えていきます。ちなみに、衝突はぶつかること、散乱はぶつかってどこかに飛んでいく過程までを含めた言葉です。

散乱と言っていますが、運動方程式を解くだけです。

面倒だったのであまり図を使ってませんが、本やネットを探せばきれいな図はたくさんあります。

相対論的量子力学でのラザフォード散乱は QED の「ラザフォード散乱」で計算しています。

力学でありそうな物体同士をぶつける話でなく、ポテンシャルに突っ込ませる場合を考えます。状況としては、質量 m の物体を物体に対して斥力 (もしくは引力) が働いている領域にぶつけるというものです。この状況は固定された電荷 $-Q$ の粒子に電荷 $-Q$ の粒子をぶつけることに対応し (電荷なのでクーロン力が働いている)、ラザフォード散乱 (Rutherford scattering) と呼ばれます。3次元で考える必要もないので、2次元空間とし、固定された標的の電荷の地点を原点とします。また、エネルギーと角運動量は保存している状況で考えます (運動量は標的を固定しているために保存しない)。

粒子に力が働いている運動なので、運動方程式を解けば軌道が分かります。というわけで、クーロン力が働いているときの運動方程式を作って、粒子の軌道を求めます。クーロン力は電磁気の基本法則で、動径ベクトル r によって

$$F(r) = \frac{Q^2}{r^2} \quad (r = |r|)$$

と与えられます。 $1/r^2$ なので、無限遠ではこの力は消えます。ちなみに、入射粒子と標的がそれぞれ Z, Z' 個の素電荷 e (電子の電荷の絶対値) を持っているなら Q^2 は $ZZ'e^2$ となります。ここでは、少し一般化するために

$$F(r) = \epsilon \frac{k}{r^2} \quad (\epsilon = \pm 1)$$

とします。 $\epsilon = +1$ のときは斥力、 $\epsilon = -1$ のときは引力になります。 k を合わせれば、 $\epsilon = -1$ で重力とすることもできます。

2次元座標 (x, y) において力は動径方向のみに作用するすれば、動径方向の単位ベクトル e_r によって力のベクトルは

$$\mathbf{F}(r) = F(r)\mathbf{e}_r \quad (\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r})$$

これは中心力になっているので、ポテンシャルは

$$U(r) = - \int_{r_0}^r d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(r') = -\epsilon \int_{r_0}^r d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_{r'} \frac{k}{r'^2} = -\epsilon \int_{r_0}^r d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \frac{k}{r'^3} = -\epsilon \int_{r_0}^r dr' \frac{k}{r'^3} r' = \epsilon \frac{k}{r}$$

と与えられます。無限遠を基準とし、 $r_0 = \infty$ としています。

運動方程式を作る前に、粒子の力学的エネルギー E と角運動量 L を与えておきます。 E と L は定義によって

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r), \quad L = mr^2\dot{\theta}$$

ドットは t 微分を表します。ぶつける粒子の位置は動径ベクトル r で与え、質量を m 、速度を $v = |v|$ としています。 θ は x 軸と r との角度です (標的の粒子は固定されたポテンシャルの発生源でしかないので、エネルギーと角運動量に運動する粒子として影響を与えない)。後のために v を $\dot{r}$ に置き換えます。

極座標 (r, θ) に書き換えます。速度ベクトル v は動径ベクトル r の時間微分なので、 r の単位ベクトルを e_r として

$$v = \frac{d}{dt}(r e_r) = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r$$

極座標の基底 e_r, e_θ を求めます。 r は、 x, y の単位ベクトル e_x, e_y を使って書くと

$$r = x e_x + y e_y \quad (x = |x|, y = |y|)$$

これを $r = |r|$ で割れば r の単位ベクトル e_r になるので

$$e_r = \frac{x}{r} e_x + \frac{y}{r} e_y = \cos \theta (1, 0) + \sin \theta (0, 1) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

θ 方向の単位ベクトル e_θ は e_r に直交し、 $|e_\theta| = 1$ なので

$$e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$\dot{e}_r$ はただの時間微分なので、 θ も時間に依存していることに注意して

$$\dot{e}_r = (-e_x \sin \theta + e_y \cos \theta) \dot{\theta} = \dot{\theta} e_\theta$$

となります。

そうすると、速度ベクトルは

$$v = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta, \quad v^2 = |v|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (e_r \cdot e_\theta = 0)$$

これを E に入れると

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

ここで r は θ の関数になっているとして、 $u(\theta) = 1/r$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{L u^2}{m} \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \end{aligned}$$

これらによって

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 + U(1/u) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) + U(1/u) \quad (1)$$

これでエネルギーの書き換えは終わりにして、次は r 方向の運動方程式を作って解を求めます。
動いている粒子の位置は動径ベクトル r で、動径方向にしか力は作用しないので運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F(r)\mathbf{e}_r$$

左辺は

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

となっているので、 r 方向の運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

左辺を角運動量を使った形にすれば

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(\ddot{r} - r\frac{L^2}{m^2r^4}\right) = m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right)$$

そして、 u は

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

となっているので

$$\begin{aligned}m\left(-\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2u^3}{m^2}\right) &= F(1/u) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{m}{L^2u^2}F(1/u) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\epsilon\frac{mk}{L^2}\end{aligned}$$

この解は簡単に求められます。右辺を 0 にした同次では単振動と同じなので、その一般解は

$$u_h = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta = C \cos(\theta - \omega)$$

C, C_1, C_2 は任意定数で、 ω は任意の角度です。特解は u を θ に依存していないとした

$$u_p = -\epsilon \frac{mk}{L^2}$$

があるので、足すことで一般解は

$$u = u_h + u_p = -\epsilon \frac{mk}{L^2} + C \cos(\theta - \omega) = \frac{mk}{L^2} (-\epsilon + \frac{L^2}{mk} C \cos(\theta - \omega))$$

となります。

θ は極座標の角度なので、座標を適当に回転させることで ω が出てこないように θ を与えられます。このことから、 $\omega = 0$ として、 C を与えてみます。この解をエネルギーの式 (1) に入れると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} (C^2 \sin^2 \theta + (-\epsilon \frac{mk}{L^2} + C \cos \theta)^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} (C^2 \sin^2 \theta + \frac{m^2 k^2}{L^4} + C^2 \cos^2 \theta - 2\epsilon \frac{mk}{L^2} C \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} (C^2 + \frac{m^2 k^2}{L^4} - 2\epsilon \frac{mk}{L^2} C \cos \theta) \end{aligned}$$

これと

$$E - U = E - \epsilon k u = E - \epsilon k (-\epsilon \frac{mk}{L^2} + C \cos \theta) = E + k (\frac{mk}{L^2} - \epsilon C \cos \theta)$$

によって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} (C^2 + \frac{m^2 k^2}{L^4} - 2\epsilon \frac{mk}{L^2} C \cos \theta) &= E + k (\frac{mk}{L^2} - \epsilon C \cos \theta) \\ \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} C^2 &= E + \frac{mk^2}{2L^2} \\ C &= \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2 k^2}{L^4}} \end{aligned}$$

というわけで、 u は

$$u = \frac{mk}{L^2} (-\epsilon + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos \theta)$$

これが $F(r)$ がいるときの粒子の軌道になります。

$\epsilon = +1$ での散乱は図 1 のようになります。灰色の丸が入射粒子、黒丸が標的の電荷の位置で原点、 θ が散乱角です。 r_{min} は標的に最も近付いた時の長さで、 θ_{min} はそのときの角度です。 b は衝突パラメータ (impact parameter) や衝突径数と呼ばれ、無限遠から侵入してくる粒子が何の影響も受けずに進む軌道に標的から引いた垂線の長さです (ベクトル b の方向は標的から粒子の軌道の方)。 θ を反時計周りに取っているの、このように書くと θ の増加方向と逆になるために速度ベクトルの方向がマイナスになります。

粒子が最も標的に近づく地点を求めてみます。エネルギーの式

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E$$

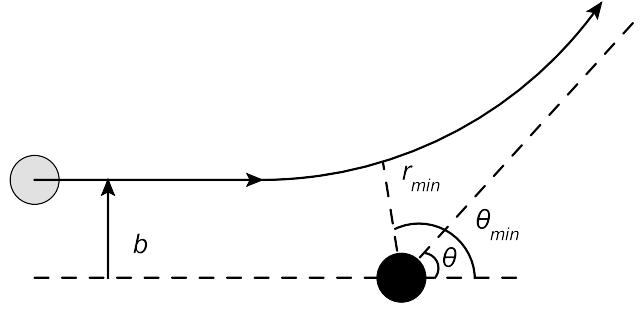


図 1

において、第一項は常に正なので

$$E \geq \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (2)$$

という制限がかかります。そして、 r の上限は無限大にまで取っていますが、下限は標的に最も近づく r_{min} です。そうすると、 $L^2/2mr + U(r)$ は r が減少すると増大していくので

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

によって、(2) を満たす最小の r を与えます。よって最近接距離 r_{min} は

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

$$r^2 - \frac{k}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

この解は

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{2L^2}{mE}} \right) = \frac{k}{2E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}}$$

最近接距離は $r_{min} > 0$ でなければいけないので

$$r_{min} = \frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}}$$

となりますが、もっと見やすい形にできます。無限遠でのエネルギーと角運動量は無限遠での速度を $v_0 = |v_0|$ とすれば

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$|L| = m|v_0|b \quad (b = |\mathbf{b}|) \quad (3)$$

角運動量は無限遠では粒子の速度ベクトルと衝突パラメータのベクトル b とが直交したもののなので、こうなります。角運動量に絶対値をつけているのは、速度 v の向きで符号が変わるからです (v の向きから絶対値を外せば右辺にマイナスがつく)。この 2 つは、エネルギーと角運動量が保存しているために、 r_{min} でも成立しているので

$$b = \frac{|L|}{m|v_0|} = \frac{|L|}{\sqrt{2mE}} \quad (4)$$

を使うことで

$$r_{min} = \frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + b^2}$$

これから衝突パラメータが 0 のとき (標的と同じ線上での衝突、ようは正面衝突) が最も標的に近づけることが分かります。導出から分かるように最近接距離は運動方程式を解かなくても求められます。

次に散乱角を求めます。運動方程式の解は

$$\frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} + A \cos(\theta + \omega) \quad (5)$$

とします ($\omega = 0$ としない)。初期条件として、 $\theta = \pi$ で r が無限大になるとすれば

$$\begin{aligned} A \cos(\pi + \omega) &= \frac{mk}{L^2} \\ A \cos \omega &= -\frac{mk}{L^2} \end{aligned} \quad (6)$$

(5) を t 微分すると

$$\dot{r} = -Ar^2\dot{\theta} \sin(\theta + \omega) = -A\frac{L}{m} \sin(\theta + \omega) \quad (7)$$

無限遠での速度は $-v_0$ なので、 $\theta = \pi$ で

$$\begin{aligned} -v_0 &= -A\frac{L}{m} \sin(\pi + \omega) \\ v_0 &= A\frac{|L|}{m} \sin \omega \end{aligned}$$

(3) を使うと

$$Ab \sin \omega = -1$$

(6) と合わせること

$$\tan \omega = \frac{L^2}{mbk}$$

として、 ω が決まります。また、 r が最小になるときには、動径方向の速度 $\dot{r}$ は 0 になるはずなので、(7) から、最近接距離での角度 θ_{min} は

$$\theta_{min} = \pi - \omega$$

となります。

粒子が角度 $\theta = \phi$ で散乱したとします。そして、最近接距離での角度 ω は r_{min} を軸に対称になっているので (図はテキトーに書いたのもう見えませんが、弾性散乱とするので対称)、 ϕ は ω を使うと

$$\phi = \pi - 2\omega$$

なので

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi - \phi}{2} &= \frac{L^2}{mbk} \\ \cot \frac{\phi}{2} &= \frac{L^2}{mbk} \quad (\tan(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\cot \phi, \cot(-\phi) = -\cot \phi) \end{aligned}$$

(4) を使ってエネルギーによる形にすれば

$$\cot \frac{\phi}{2} = \frac{2bE}{k} \quad (8)$$

というわけで、散乱角 ϕ は逆三角関数によって

$$\phi = 2 \cot^{-1} \frac{2bE}{k}$$

これから、散乱する角度は衝突パラメータとエネルギーによって決定されるのが分かります。

次に断面積を定義します。単に断面積と言っていますが、散乱断面積とか衝突断面積と呼ぶこともあります。断面積の言葉での定義は、散乱した粒子が入ってくる 2 次元面です。なので、断面積と呼ばれます。そして、ここでの定義がどんな本でも共通になっていないことに注意してください。

まず、標的に当てる粒子数の密度は λ として、 λ は単位面積あたりに毎秒 λ 個の粒子 (単位は、長さを L 、時間を T とすれば、 $L^{-2}T^{-1}$) と定義します。そして、散乱されて来る面が必要なので、その面を与えます。面を動径とは無関係にしたいので、立体角を使います (下の補足参照)。立体角は 2 次元の面に対応し、その面に粒子が入ってくるとします。微小な立体角を $d\Omega$ として、それによって作られる面を通過していく粒子の数は毎秒 dn 個とします。そうすると、 dn は $\lambda d\Omega$ に比例しているとして ($d\Omega$ は無次元量)

$$dn = q(\theta, \phi) \lambda d\Omega \quad (9)$$

ここでの q は極座標 (r, θ, ϕ) での θ, ϕ に依存しています (動径は無関係だから)。これの右辺を全領域にわたって積分すれば、散乱された全粒子数になるべきなので (全空間を覆えば必ず全ての粒子を含む)、通過する全粒子数を n として

$$n = \int_0^{4\pi} q(\theta, \phi) \lambda d\Omega$$

積分範囲を $0 \sim 4\pi$ にしているのは球面全体の立体角が 4π だからです。極座標では立体角が

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

なので

$$n = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi q(\theta, \phi) \lambda \sin \theta$$

そして、標的に当てる粒子密度 λ にかけたら全粒子数になるような 2 次元面積 σ を定義します。そうすると

$$\sigma \lambda = \int_0^{4\pi} q(\theta, \phi) \lambda d\Omega$$

λ は角度依存性を持つ量ではないので

$$\sigma = \int_0^{4\pi} q(\theta, \phi) d\Omega$$

この σ を断面積 (cross section)、そして Ω で微分して取り出せる

$$q(\theta, \phi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\theta, \phi}$$

を微分断面積 (differential cross section) といいます。微分断面積は θ, ϕ によって方向が指定された立体角毎の断面積です (θ は散乱角、 ϕ は方位角と言えます)。

もう一つ微分断面積の定義として衝突パラメータを使った場合を見ておきます。 z 軸方向に粒子が入射しているとして、衝突パラメータ b と db の間に入る粒子数は (半径 b の円と半径 $b + db$ の円による幅 db の円環の面積に λ をかける)

$$dN = \lambda 2\pi b db$$

この b と $b + db$ の間に入射してきた粒子が θ と $\theta + d\theta$ の間に散乱するとすれば、立体角

$$d\Omega(\theta) = 2\pi \sin \theta d\theta$$

に入る粒子数と同じになっているはずです ($r \sin \theta$ の半径の円の円周に微小な $r d\theta$ をかけた $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ の面積に対応する立体角)。そうすると (9) から

$$\lambda 2\pi b db = q(\theta) \lambda d\Omega(\theta)$$

$$2\pi b db = q(\theta) d\Omega(\theta)$$

θ のみに依存しているとしているのは、衝突パラメータ b は (8) から分かるように、エネルギーが与えられている時、散乱角のみに依存するからです。左辺は b に関して、右辺は θ に関して積分を取れば全粒子数にできるので、断面積は

$$\sigma = 2\pi \int_0^\infty b db = 2\pi \int_0^\pi q(\theta) \sin \theta d\theta$$

b の考えられる全範囲は $0 \sim \infty$ なので、上限を ∞ にしています。最右辺が θ のみに依存していることから立体角でなく θ で微分した

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi q(\theta) \sin \theta$$

この形を微分断面積と呼ぶこともあります。また、 b が θ に依存していることから

$$dN = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta$$

とも書けるので

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \\ \frac{d\sigma}{d\Omega(\theta)} \frac{d\Omega(\theta)}{d\theta} &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \\ \frac{d\sigma}{d\Omega(\theta)} &= \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \end{aligned}$$

絶対値をつけているのは粒子数が負の値を持つわけがないからです。

すでに必要なものは揃っているのでラザフォード散乱での微分断面積を求めるのは簡単です。衝突パラメータ b の θ 微分は

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{k}{4E} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

散乱角は ϕ でなく θ にしています。これから微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega(\theta)} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{k}{2E} \frac{k}{4E} \frac{\cot(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \\ &= \frac{k^2}{2(2E)^2} \frac{\cot(\theta/2)}{\sin \theta \sin^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

$\sin \theta$ は $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ なので

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega(\theta)} &= \frac{k^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\cos(\theta/2) \sin^3(\theta/2)} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ &= \frac{k^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}\end{aligned}$$

この微分断面積をラザフォードの散乱公式と言います。

・補足

立体角の定義を示します。立体角は2次元の角度を3次元に拡張したものです。2次元の角度から見ておきます。半径 r の円があり、その円周上の円弧 a の角度 θ は

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

から、 $\theta = a/r$ と与えられます。これを3次元球に適用します。球なので、半径 r の球の表面上の面 A の面積を s として

$$\frac{s}{r^2}$$

とすることで、円弧の角度と対応させます。そうすると、 A を底面とし、そこから球の原点を頂点として繋いだとき、その頂点での3次元的な角度を Ω として

$$\Omega = \frac{s}{r^2}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{s}{4\pi r^2}$$

右辺の分母は球の表面積なので、円弧の場合と対応した式になります。この Ω を立体角と呼び、 4π が球全体の立体角となります。

球面上の微小な面は極座標 (r, θ, ϕ) では

$$r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

これを角度で積分すれば球面上の適当な面 A になるので立体角は

$$\Omega = \int_A d\theta d\phi \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} = \int_A d\theta d\phi \sin \theta$$

となります。積分範囲は面 A になる範囲です。また、微小な立体角は $\sin \theta d\theta d\phi$ です。

球だけでなく任意の閉曲面 (球のように閉じた曲面) でも定義されます。適当な閉曲面を S とし、 S 上の領域の面積を s 、単位法線ベクトルを n とします。原点とその領域を結ぶ単位ベクトルを e 、長さを r とすれば、その領域の立体角は

$$\Omega = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}}{r^2} \quad (\mathbf{s} = s\mathbf{n})$$

と定義されます。 $\mathbf{e}$ と $\mathbf{n}$ の間の角度を θ とすれば $\mathbf{e} \cdot \mathbf{s} = s \cos \theta$ なので、 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}$ は $\mathbf{e}$ を法線方向にする面積です。

任意の閉曲面の全体の立体角は 4π です。原点を半径 r_0 の球で囲み、さらに外側を適当な閉曲面 S によって囲みます。 S 上の原点から r の位置にある微小面積を Δs とし、その単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とします。原点とその S 上の領域を結ぶ単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とすれば、立体角は

$$d\Omega = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \Delta s}{r^2}$$

この立体角に対応する球面上の微小面積を Δs_0 とすれば、球面上の法線方向は $\mathbf{e}$ なので

$$\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \Delta s_0}{r_0^2} = \frac{\Delta s_0}{r_0^2} = d\Omega$$

よって、球の表面で積分することで

$$\int d\Omega = \int \frac{ds_0}{r_0^2} = \frac{4\pi r_0^2}{r_0^2} = 4\pi$$

となります。