

ソリトン

通常の力学の項目では絶対に出てこないソリトン解を求めます。ソリトンの物理的な話には触れずに単に波動方程式型の非線形方程式を解くということにします (使われている分野が力学の範囲を超えているものばかりなのと、視覚化させるのが面倒だったからです)。

ここでは

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(t, x) + \frac{1}{a^2} \sin(a\phi(t, x)) = 0$$

という微分方程式を扱います。これはサイン・ゴールドン (sine-Gordon) 方程式と呼ばれます。 a は任意定数で、普通は $a = 1$ です。 x は 3 次元でなく 1 次元なので、時間と 1 次元座標による 2 次元の方程式です。このような微分方程式を双曲型偏微分方程式 (hyperbolic partial differential equation) と呼び、サイン・ゴールドン方程式は非線形での双曲型偏微分方程式の一種です。もし $a\phi$ が微小なら

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(t, x) + \frac{1}{a} \phi(t, x) = 0$$

となり、クライン・ゴールドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれるものになります。力学ではどうでもいいことですが、このことから分かるように、サイン・ゴールドン方程式はローレンツ不変な構造を持っています。

サイン・ゴールドン方程式は一般的に解けないですが、いくつか解を求めることはできます。それを見ていきます。

サイン・ゴールドン方程式は波動方程式と同じような格好をしているので、解として

$$\phi(t, x) = f(x - vt)$$

という形を考えます。 $\xi = x - vt$ とすれば

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{df(\xi)}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

から

$$v^2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} - \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{a^2} \sin(af(\xi)) = 0$$
$$(1 - v^2) \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} \sin(af(\xi))$$

と変形させます。これは面倒なだけでわりと簡単に解けます。両辺に $df/d\xi$ をかけて、積分すれば

$$\begin{aligned}
(1-v^2) \frac{df}{d\xi} \frac{d^2 f}{d\xi^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{df}{d\xi} \sin(af) \\
\frac{1}{2}(1-v^2) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \frac{df}{d\xi} \right) &= -\frac{1}{a^3} \frac{d}{d\xi} \cos(af) \\
\frac{1}{2}(1-v^2) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 &= -\frac{1}{a^3} \cos(af) + c
\end{aligned}$$

c は積分定数です。 $f(\xi)$ と $df/d\xi$ が $\xi \rightarrow \pm\infty$ で 0 になるとすれば

$$0 = -\frac{1}{a^3} + c$$

から、 $c = 1/a^3$ となります。なので、右辺は半角公式を使って

$$-\frac{1}{a^3} \cos(af) + \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3} (1 - \cos(af)) = \frac{2}{a^3} \sin^2\left(\frac{af}{2}\right)$$

そうすると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-v^2) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 &= \frac{2}{a^3} \sin^2\left(\frac{af}{2}\right) \\
(1-v^2) (df)^2 &= \frac{4}{a^3} \sin^2\left(\frac{af}{2}\right) (d\xi)^2 \\
\frac{df}{\sin\left(\frac{af}{2}\right)} &= \pm \frac{2}{a\sqrt{a}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-v^2}} \\
\frac{2}{a} \int \frac{dg}{\sin(g)} &= \pm \frac{2}{a\sqrt{a}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-v^2}} \\
\frac{2}{a} \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \frac{af}{2}}{1 + \cos \frac{af}{2}} &= \pm \frac{2}{a\sqrt{a}} \frac{\xi}{\sqrt{1-v^2}} + c \\
\frac{1}{a} \log \frac{2 \sin^2 \frac{af}{4}}{2 \cos^2 \frac{af}{4}} &= \pm \frac{2}{a\sqrt{a}} \frac{\xi}{\sqrt{1-v^2}} + c \\
2 \log \tan \frac{af}{4} &= \pm \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-v^2}}
\end{aligned}$$

c は積分定数で最後に ξ_0 としています。よって、 $f(\xi)$ として

$$\begin{aligned}
\tan \frac{af(\xi)}{4} &= \exp \left[\pm \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-v^2}} \right] \\
f(\xi) &= \frac{4}{a} \arctan \left(\exp \left[\pm \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-v^2}} \right] \right) \tag{1}
\end{aligned}$$

という解が求まります ($|v| < 1$)。arctan は tan の逆関数です。プラスの解はキンク解 (kink solution)、マイナスは反キンク解 (antikink solution) と呼ばれます。この解による波をソリトン (soliton) と呼びます。波と言っても

り、最初に波動方程式の解のような形を仮定していますが、ソリトンは非線形方程式の解であるために重ね合わせの原理が使えません。また、波動方程式に従う $\phi(t, x)$ が、 $x \rightarrow \infty$ で 0 になるようなものを孤立波 (solitary wave) と呼んでいて、ソリトンも孤立波です。

ソリトンは速度や大きさ、形を変えずに動くという性質を持っています。この性質を持った波は身近に存在しています。例えば、孤立波の最初の発見は運河で走ってた船が止まったときに生じた波です。もう 1 つ特徴的なのが、2 つのソリトンがぶつかっても、2 つのソリトンが混ざることなく安定して存在する (漸近的にはお互いを通り抜けている) という点です。通常の波では波同士をぶつけると形を保てなくなります。この衝突しても 2 つの波が安定して存在しているという性質は粒子の性質と同じで、このためソリトンは粒子性を持った孤立波と表現されます。

ちなみに、非常に簡単な解として

$$\phi = \frac{2\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

というものもあります。これは $\phi(t, x)$ が離散的な定数になっている解です。この場合、微分部分は 0、 $\sin$ 部分は $\sin(2\pi n)$ となるために 0 となって、方程式を満たします (この解は後でもう 1 回触れます)。

サイン・ゴルドン方程式の解をもう少し一般化して求めます。ただし、 $a = 1$ として

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(t, x) + \sin(\phi(t, x)) = 0$$

これを解きます。まず、解の形を

$$\phi(t, x) = 4 \arctan\left(\frac{F(x)}{G(t)}\right) = 4 \arctan(\theta(t, x))$$

と仮定します。 $F(x), G(t)$ は任意関数です。これをサイン・ゴルドン方程式に入れます。 $\sin$ の項は

$$\sin \phi = \sin(4 \arctan \theta) = 2 \sin(2 \arctan \theta) \cos(2 \arctan \theta)$$

$\arctan \theta$ は

$$2 \arctan \theta = \arcsin \frac{2\theta}{1 + \theta^2}$$

なので

$$\begin{aligned}
\sin(4 \arctan \theta) &= 2 \sin(2 \arctan \theta) \cos(2 \arctan \theta) \\
&= 2 \sin(2 \arctan \theta) \sqrt{1 - \sin^2(2 \arctan \theta)} \\
&= 2 \frac{2\theta}{1 + \theta^2} \sqrt{1 - \frac{4\theta^2}{(1 + \theta^2)^2}} \\
&= 2 \frac{2\theta}{1 + \theta^2} \sqrt{\frac{(1 - \theta^2)^2}{(1 + \theta^2)^2}} \\
&= 4\theta \frac{1 - \theta^2}{(1 + \theta^2)^2}
\end{aligned}$$

微分の項は、 $\arctan$ の微分が

$$\frac{d}{d\theta} \arctan \theta = \frac{1}{1 + \theta^2}$$

なので

$$\begin{aligned}
4 \frac{\partial}{\partial t} \arctan \theta(t, x) &= 4 \frac{1}{1 + \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\
4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \arctan \theta(t, x) &= -4 \frac{2\theta}{(1 + \theta^2)^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + 4 \frac{1}{1 + \theta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\
&= \frac{4}{(1 + \theta^2)^2} \left(-2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + (1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)
\end{aligned}$$

x での微分は t を x に変えればいいだけなので、サイン・ゴールドン方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(1 + \theta^2)^2} \left[-2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + (1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - (1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] + 4\theta \frac{(1 - \theta^2)}{(1 + \theta^2)^2} &= 0 \\
-2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + (1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - (1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \theta(1 - \theta^2) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \theta + \theta^3
\end{aligned}$$

$\theta(t, x)$ を $F(x), G(t)$ に変えます。左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= F \frac{\partial^2 G^{-1}}{\partial t^2} + \frac{F^3}{G^2} \frac{\partial^2 G^{-1}}{\partial t^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{F^2}{G^2} \frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\
&= F(2G^{-3} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 - G^{-2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}) + \frac{F^3}{G^2} (2G^{-3} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 - G^{-2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{F^2}{G^3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}
2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 - 2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \theta + \theta^3 &= 2\frac{F^3}{G}\left(\frac{\partial G^{-1}}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{F}{G^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \frac{F}{G} + \frac{F^3}{G^3} \\
&= 2\frac{F^3}{G}\left(-G^{-2}\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{F}{G^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \frac{F}{G} + \frac{F^3}{G^3} \\
&= 2\frac{F^3}{G^5}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{F}{G^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \frac{F}{G} + \frac{F^3}{G^3}
\end{aligned}$$

両辺に G^3/F を作用させれば、左辺は

$$\left(2\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right) + \frac{F^2}{G^2}\left(2\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right) - \frac{G^2}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

右辺は

$$2\frac{F^2}{G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - G^2 + F^2$$

なので、あわせて

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{F^2}{G^2}\left(2\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right) - \frac{G^2}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2\frac{F^2}{G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - G^2 + F^2 \\
\frac{F^2}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{G^2}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= G^2 - G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 - F^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2
\end{aligned}$$

右辺は t と x で微分すると 0 になるので、両辺を t, x で微分します。左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F^2}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{G^2}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(F^2\frac{\partial G^{-1}}{\partial t}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{F^2}{G}\frac{\partial^3 G}{\partial t^3} + 2G\frac{\partial G}{\partial t}\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F^2}{G^2}\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{F^2}{G}\frac{\partial^3 G}{\partial t^3} + 2\frac{G}{F}\frac{\partial G}{\partial t}\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \\
&= -\frac{2F}{G^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{2F}{G}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 G}{\partial t^3} - \frac{2G}{F^2}\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2F}{G}\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}
\end{aligned}$$

右辺は 0 なので $2FG(\partial G/\partial t)(\partial F/\partial x)$ で割ることで

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{G^3}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{1}{G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial^3 G}{\partial t^3} - \frac{1}{F^3}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{G^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= 0 \\
G^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(G^{-1}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right) &= -F^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(F^{-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}$$

これは t と x が分離した式による等号になっています。このため、両辺とも t と x を含んでいない結果でないと等号が成立しません。例えば、もし左辺を計算した結果が t^2 みたいになっていると、右辺は x の関数しかないのでどうしても t^2 という結果を出すことが出来ないの、等式が成立しません。そうすると、等式を成立させるには定数しかないので、それを k^2 として

$$G^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(G^{-1}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)=k^2$$

$$F^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(F^{-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=-k^2$$

として、2つの式にします。変形して

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(G^{-1}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)=G\frac{\partial G}{\partial t}k^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(G^{-1}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)=\frac{1}{2}k^2\frac{\partial}{\partial t}G^2$$

$$\frac{1}{G(t)}\frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2}=\frac{1}{2}k^2G^2(t)+c_1$$

$$\frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2}=\frac{1}{2}k^2G^3(t)+c_1G(t)$$

x でも同様に

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}k^2F^3(x)+c_2F(x)$$

c_1, c_2 は積分定数です。1階微分方程式に持っていくと

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t}=\frac{1}{2}k^2G^3(t)+c_1G(t)-d^2$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=-\frac{1}{2}k^2F^3(x)+c_2F(x)+d^2$$

d は積分定数です。ここで、 c_1 を $\sqrt{c^2-1}$ 、 c_2 を c として

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t}=\frac{1}{2}k^2G^3(t)+\sqrt{c^2-1}G(t)-d^2$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=-\frac{1}{2}k^2F^3(x)+cF(x)+d^2$$

後はこれを解いて $G(t)$ と $F(x)$ を求めればいいです。 $k=d=0$ とすれば

$$G(t)=\exp[\sqrt{c^2-1}t]+C_1$$

$$F(x)=e^{cx}+C_2$$

よって、 $\phi(t, x)$ は (積分定数は C としてしまいます)

$$\begin{aligned}
\phi(t, x) &= 4 \arctan \frac{F(x)}{G(t)} = 4 \arctan \exp[cx - \sqrt{c^2 - 1}t + C] \\
&= 4 \arctan \exp \left[c \left(x - \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}t \right) + C \right] \\
&= 4 \arctan \exp \left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} + C \right] \quad \left(v = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}, c^2 = \frac{1}{1 - v^2} \right)
\end{aligned}$$

これは (1) と一致しています。\$c\$ が正のときがキンク解、負のときが反キンク解です。

もっと近似的に解こうとする方法もあります。例えば、解として

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + g(x, t) \quad (2)$$

と仮定します。第 1 項は時間に依存していない部分で、第 2 項が時間にも依存しています。さらに第 2 項は第 1 項に比べて十分小さいとします。テーラー展開的に言えば \$\phi(x, t)\$ を \$\phi_0(x)\$ 周りで展開していることになります。\$\phi_0(x)\$ は時間微分のないサイン・ゴールドン方程式に従うべきなので

$$\frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \sin(a\phi_0(x)) = 0 \quad (3)$$

そして、サイン・ゴールドン方程式を (2) によって書き換えると (\$\sin\$ は \$g(x, t)\$ が微小として展開する)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \sin(a(\phi_0(x) + g(x, t))) \\
&= \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \sin(a\phi_0(x)) + \frac{1}{a} g(x, t) \cos(a\phi_0(x))
\end{aligned}$$

(3) を使うことで

$$\frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a} g(x, t) \cos(a\phi_0(x)) = 0$$

となります。後は適当に \$g(x, t)\$ の形を仮定して解いていけばいいです。ちなみに、(3) を \$x\$ で微分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_0(x)}{\partial x} + \frac{1}{a} \cos(a\phi_0(x)) \frac{\partial \phi_0(x)}{\partial x} = 0$$

となって \$\partial \phi_0(x)/\partial x\$ を \$\psi(x)\$ のように思えば、これは量子力学での時間に依存しないシュレーディンガー方程式と同じ構成になります。

少しサイン・ゴールドン方程式の解について調べてみます。サイン・ゴールドン方程式のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{a^3} (1 - \cos(a\phi(t, x)))$$

で与えられます (ラグランジアンに関しては解析力学の「オイラ - ・ラグランジュ方程式」参照)。独立変数は \$\phi, \partial \phi / \partial t, \partial \phi / \partial x\$ です。実際にオイラ - ・ラグランジュ方程式に入れてみれば

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\partial \phi / \partial t)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \\
&= -\frac{1}{a^3} a \sin(a\phi(t, x)) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \sin(a\phi(t, x))
\end{aligned}$$

として、サイン・ゴールドン方程式が出てきます。ラグランジアン第1項と第2項は運動エネルギー T に対応し、第3項はポテンシャル V に対応します ($L = T - V$)。なので、ポテンシャルとして

$$V = \frac{1}{a^3} (1 - \cos(a\phi(t, x)))$$

見て分かるようにポテンシャルの変数を ϕ と見なせるので、 ϕ で微分すれば極値が分かります。微分すると

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{1}{a^2} \sin(a\phi)$$

極値 $\partial V / \partial \phi = 0$ であるためには $\phi_n = n\pi/a$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) であればいいです。さらに極小値であるためにはもう1回微分して

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{1}{a} \cos(a\phi) \geq 0$$

a が正の値なら $\cos(a\phi) \geq 0$ であればいいので、 $\phi_m = 2m\pi/a$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) となります。つまり、ポテンシャルを最小値にする ϕ は無限個あることになります。さらに、上で求めた解 $f(\xi)$ において、 $x = \pm\infty$ の極限を取ると

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} f(\xi = x - vt) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a} \arctan \left(\exp \left[\pm \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right) \\
&= \frac{4}{a} \arctan(\infty) \\
&= \frac{4}{a} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2\pi}{a} \\
&= \phi_{m=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(\xi = x - vt) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{a} \arctan \left(\exp \left[\pm \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right) \\
&= \frac{4}{a} \arctan(0) \\
&= 0 \\
&= \phi_{m=0}
\end{aligned}$$

となります。よって、 $f(\xi)$ は V を最小値にする解を $x = \pm\infty$ に持っています。