相対論的力学

ローレンツ変換を力学に適用したときの導入部分を見ていきます。ローレンツ変換とミンコフスキー空間を知ってること前提になっています。
ここでの話は電磁気学の「マクスウェル方程式とローレンツ変換」、「ローレンツ力の変換」、「ミンコフスキー空間」の続きになっています。
ここでの $\boldsymbol{p}$ は力学の運動量ではないことに注意してください。
ギリシャ文字の添え字は 0 から 3、ローマ文字では 1 から 3 としています。

力学には、ガリレイ変換で繋がっている全ての慣性系において物理法則は変わらない、ということが要求されています。これをローレンツ変換で繋がっている全ての慣性系において物理法則は変わらないとしたのが特殊相対性理論 (special relativity) です。端的に言えば、相対性原理と光速度不変の原理を仮定した理論です。この変更で力学がどうなるのかを見ていきます。

また、電磁気のマクスウェル方程式はこの要求を満たしているので電磁気学は特殊相対性理論に含まれており、ローレンツ力での運動方程式がどうなるかは電磁気学の「ローレンツ力の変換」で見ています。

慣性系 $O(t,x,y,z)$ から x 軸方向に一定速度 V で動いてる慣性系 $O'(t',x',y',z')$ へのローレンツ変換は

$$
\begin{aligned}
&ct' = \gamma(-\frac{V}{c}x + ct)\\
&x' = \gamma(x - Vt)\\
&y' = y\\
&z' = z
\end{aligned}
$$

c は光速、γ は

$$\gamma = (1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2}$$

これらの時間微分から速度の変換は (電磁気学の「ローレンツ力の変換」参照)

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \gamma_*^2(v_x - V) \tag{1a}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \gamma^{-1}\frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} = \gamma^{-1}\gamma_*^2 v_y \tag{1b}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \gamma^{-1}\frac{v_z}{1 - v_x V/c^2} = \gamma^{-1}\gamma_*^2 v_z \tag{1c}$$

γ_* は

$$\gamma_* = (1 - \frac{v_x V}{c^2})^{-1/2}$$

加速度は

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \gamma^{-3}\gamma_*^6 a_x$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \gamma^{-2}(\gamma_*^4 a_y + \frac{1}{c^2}\gamma_*^6 a_x v_y V)$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \gamma^{-2}(\gamma_*^4 a_z + \frac{1}{c^2}\gamma_*^6 a_x v_z V)$$

加速度に質量 m をくっつけたのが運動方程式です。そして、相対性原理は運動方程式に対して

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F} \;\Rightarrow\; m\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt'} = \boldsymbol{F}'$$

となることを要求します。しかし、力 $\boldsymbol{F}$ が加速度の変換での余計な項を消してくれないと成立しません。実際に、電磁気のローレンツ力では成立しないのは「ローレンツ力の変換」で示しています。というわけで、ニュートンの運動方程式はそのままでは使えないので変更します。

特殊相対性理論はローレンツ変換で不変になるように作られており、それはミンコフスキー空間の 4 元ベクトルを用いて記述されています (4 元ベクトルはローレンツ変換と同じ変換をするベクトルのこと)。なので、力学を 4 元ベクトルで書き直したのが相対論的力学です (ミンコフスキー空間上の質点としての力学)。位置の時間微分による速度と加速度は 4 元ベクトルになっていないので、4 元ベクトルになる速度と加速度を導入します。そのために、全ての慣性系で不変な時間を作ります。位置の 4 元ベクトルは $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ $(x^0 = ct)$、これらの n 乗は $(x^0)^n$ のように表記することにして、ミンコフスキー空間の線素は

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad (dx^0 = cdt)$$

これはローレンツ変換で不変な量なので、これをもとにして時間を作ります。変形すれば

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= (dx^0)^2(1 - (\frac{dx^1}{dx^0})^2 - (\frac{dx^1}{dx^0})^2 - (\frac{dx^1}{dx^0})^2) \\
&= c^2(dt)^2\big(1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx^1}{dt})^2 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx^1}{dt})^2 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx^1}{dt})^2\big) \\
&= c^2(dt)^2\big(1 - \frac{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}{c^2}\big) \\
&= c^2(dt)^2(1 - \frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2}) \\
(\frac{ds}{c})^2 &= (1 - \frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})(dt)^2 \\
\frac{ds}{c} &= \gamma_v^{-1}dt \qquad (\gamma_v^{-1} = \sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2}})
\end{aligned}$$

線素は正です。$\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ は粒子の 3 次元速度です。また、ローレンツ変換に対しては線素の不変性から

$$\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}'(t')|^2}{c^2}}dt' = \sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2}}dt$$

このようにローレンツ不変で時間の次元を持つので、$d\tau = ds/c$ とすれば

$$\tau = \int_0^t d\tau = \int_0^t dw\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}(w)|^2}{c^2}}$$

として、ローレンツ不変な時間が作れます。τ を速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている粒子の固有時間 (proper time) と言い、$|\boldsymbol{v}| \ll c$ で時間 t になります。固有時間は粒子が止まって見える慣性系において (粒子の位置が変化しないので dx^1, dx^2, dx^3 は 0)

$$(d\tau)^2 = (\frac{ds}{c})^2 = (dt)^2$$

となるために、粒子が止まっている慣性系での時間 (粒子に張り付いている時計の時間) と言われます。

　固有時間で 4 元ベクトル x^μ を微分すると

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma_v\frac{dx^\mu}{dt}$$

u^0 と u^i $(i = 1, 2, 3)$ は

$$u^0 = \gamma_v\frac{dx^0}{dt} = \gamma_v c$$
$$u^1 = \gamma_v\frac{dx^1}{dt} = \gamma_v v^1$$
$$u^2 = \gamma_v\frac{dx^2}{dt} = \gamma_v v^2$$
$$u^3 = \gamma_v\frac{dx^3}{dt} = \gamma_v v^3$$

これらの変換は、x^μ の変換から

$$u'^0 = \frac{dx'^0}{d\tau} = c\frac{dt'}{d\tau} = c\gamma_v\frac{dt'}{dt} = c\gamma_v\frac{d}{dt}\gamma(-\frac{V}{c^2}x^1 + t) = \gamma(-\frac{V}{c}\gamma_v\frac{dx^1}{dt} + \gamma_v c) = \gamma(-\frac{V}{c}u^1 + u^0)$$
$$u'^1 = \frac{dx'^1}{d\tau} = \gamma_v\frac{dx'^1}{dt} = \gamma_v\frac{d}{dt}\gamma(x^1 - Vt) = \gamma(u^1 - \gamma_v V) = \gamma(u^1 - V\frac{u_0}{c})$$
$$u'^2 = \frac{dx'^2}{d\tau} = \gamma_v\frac{dx'^2}{dt} = \gamma_v\frac{dx^2}{dt} = u^2$$
$$u'^3 = \frac{dx'^3}{d\tau} = \gamma_v\frac{dx'^3}{dt} = \gamma_v\frac{dx^3}{dt} = u^3$$

となり、ローレンツ変換の形です。というわけで、u^μ は 4 元ベクトルで、4 元速度と呼ばれます。例えば、粒子が x 軸方向に $v^1 = V$ $(\gamma_v = \gamma)$ で動いているなら $u'^1 = 0$ となり、粒子が止まっている慣性系への変換になります。

もう 1 回微分すると

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{du^\mu}{dt} = \gamma_v\frac{du^\mu}{dt} = \gamma_v\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}\frac{dx^\mu}{dt}$$
$$= \gamma_v(\frac{dx^\mu}{dt}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}\frac{d^2x^\mu}{dt^2})$$

α^0 は

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= \gamma_v(\frac{dx^0}{dt}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}\frac{d^2x^0}{dt^2}) \\
&= \gamma_v c\frac{1}{2}(1-\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^{-3/2}\frac{1}{c^2}\frac{d|\boldsymbol{v}(t)|^2}{dt} \\
&= \gamma_v c(1-\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^{-3/2}\frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{c^2}\frac{d|\boldsymbol{v}(t)|}{dt} \\
&= c(1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-2}\frac{|\boldsymbol{v}|}{c^2}\frac{d}{dt}\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2} \\
&= c(1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-2}\frac{|\boldsymbol{v}|}{c^2}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}(v^1\frac{dv^1}{dt}+v^2\frac{dv^2}{dt}+v^3\frac{dv^3}{dt}) \\
&= \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^2}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c} \qquad (\frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{2}$$

α^1 は

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \gamma_v(\frac{dx^1}{dt}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}\frac{d^2x^1}{dt^2}) \\
&= \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^2}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^1 + \frac{1}{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}a^1
\end{aligned}$$

α^2, α^3 は α^1 と同じなので、まとめると

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^2}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c} = \gamma_v^4\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c} \\
\alpha^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}a^1 + \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^1) = \gamma_v^2a^1 + \gamma_v^4\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^1 \\
\alpha^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}a^2 + \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^2) = \gamma_v^2a^2 + \gamma_v^4\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^2 \\
\alpha^3 &= \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}a^3 + \frac{1}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^3) = \gamma_v^2a^3 + \gamma_v^4\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}v^3
\end{aligned}$$

α^μ はローレンツ変換に対して

$$\alpha'^0 = \frac{du'^0}{d\tau} = \gamma_v \frac{du'^0}{dt} = \gamma_v \frac{d}{dt}\gamma(-\frac{V}{c}u^1 + u^0)$$

となるだけなので α^μ は 4 元ベクトルで、4 元加速度と呼ばれます。

4 元ベクトルの運動量として

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mu^\mu$$

これは 4 元運動量と呼ばれ、質量 m は静止質量 (rest mass) と呼ばれる定数です。静止質量は粒子が止まって見える慣性系での慣性質量で、ローレンツ不変な量です。ちなみに、質量が速度に依存すると言っているときの質量は

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}$$

で与えられる m_r のことで、相対論的質量 (relativistic mass) と呼ばれます。この関係式は Bucherer の実験 (1909 年) や Guye と Lavanchy の実験 (1915 年) で確かめられました。

4 元運動量 p^μ の 3 次元部分 $\boldsymbol{p}$ ($p^\mu = (p^0, \boldsymbol{p})$) が運動の法則を作ると仮定し、粒子の速度が $\boldsymbol{v}$、時間 t での慣性系において

- 運動の第一法則

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}} = const$$

- 運動の第二法則

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{u}) = \frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}} = \boldsymbol{f}$$

- 運動の第三法則

$$\frac{d}{dt}\frac{m_1\boldsymbol{v}_1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_1|^2/c^2}} + \frac{d}{dt}\frac{m_2\boldsymbol{v}_2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}_2|^2/c^2}} + \cdots = 0$$

$\boldsymbol{f}$ は力、第三法則では各粒子の質量と速度を $m_a, \boldsymbol{v}_a$ $(a = 1, 2, \ldots)$ としています。実際に、ローレンツ力において、ローレンツ変換で形を変えない運動方程式がこの形になるのは電磁気学の「ローレンツ力の変換」で求めています。

運動方程式が作れたので、次に力学的エネルギーを作ります。力学と同じように速度の内積を取ってみると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}} &= \frac{m}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}} \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}\frac{1}{c^2}\frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt} \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2} \\
&= \frac{m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}(1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}+\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}) \\
&= \frac{m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(2) で出てきたように

$$
\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}=\frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{(1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2)^{3/2}}
$$

なので

$$
\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}
$$

これを運動方程式に使えば

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}} &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} \\
\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}-\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t_0)|^2/c^2}} &= \int_{t_0}^{t}dt\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

左辺は、ϵ を微小としたとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} &= 1+\frac{d}{d\epsilon}(1-\epsilon)^{-1/2}|_{\epsilon=0}\epsilon+\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\epsilon^2}(1-\epsilon)^{-1/2}|_{\epsilon=0}\epsilon^2+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2!}\frac{3}{4}\epsilon^2+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2+\frac{5}{16}\epsilon^3+\cdots
\end{aligned}
$$

と展開されることを使えば、$|\boldsymbol{v}(t)|, |\boldsymbol{v}(t_0)| \ll c$ として

$$
\begin{aligned}
\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}}-\frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}(t_0)|^2/c^2}} &= mc^2(1+\frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2}+\frac{3}{8}(\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^2+\frac{5}{16}(\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^3+\cdots)-(t_0) \\
&= \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t)|^2-\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_0)|^2+mc^2(\frac{3}{8}(\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^2+\frac{5}{16}(\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{c^2})^3+\cdots)-\cdots
\end{aligned}
$$

1 行目の (t_0) は第 1 項での $\boldsymbol{v}(t)$ を $\boldsymbol{v}(t_0)$ にした項です。よって、$|\boldsymbol{v}(t)|, |\boldsymbol{v}(t_0)| \ll c$ のとき

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t_0)|^2 + \cdots = \int_{t_0}^{t} dt\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}$$

微小な $|\boldsymbol{v}|/c$ を含む「$\cdots$」を無視すれば、力学での力学的エネルギー保存の式です。初期条件を $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$ とすれば、この結果から相対論的な運動エネルギー K は

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}} - mc^2$$

と与えられます。そして、相対論的エネルギーと言っているときは $\boldsymbol{f} = 0$ での

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}(t)|^2/c^2}} = \gamma_v mc^2 = K + mc^2$$

のことです。$\boldsymbol{v} = 0$ で

$$E = mc^2$$

となることから、mc^2 は静止エネルギー (rest energy) と呼ばれ、相対論的エネルギーは粒子の運動エネルギーと静止エネルギーの和と言えます。このように質量とエネルギーに関係があることを質量とエネルギーの等価性と呼んでいます (特に静止している粒子での $E = mc^2$ に対して)。

エネルギーは 4 元運動量の 3 次元部分 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = \gamma_v m\boldsymbol{v}$ を使った形に書けて

$$E^2 = \gamma_v^2 m^2 c^4 = \gamma_v^2 m^2 c^4 (\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} + 1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}) = c^2\gamma_v^2 m^2 |\boldsymbol{v}|^2 + m^2c^4 = c^2|\boldsymbol{p}|^2 + m^2c^4$$

相対論的エネルギーと言っているときは大抵がこの式です。静止質量と光速は全ての慣性系で同じ値なので

$$m^2c^4 = E^2 - c^2|\boldsymbol{p}|^2$$

とすれば、$E^2 - c^2|\boldsymbol{p}|^2$ はローレンツ不変な量であるのが分かります。また

$$E = \gamma_v mc^2$$

$$\frac{E}{c^2}\boldsymbol{v} = \gamma_v m\boldsymbol{v}$$

から、$\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{v}$$

と書けます。

相対論的エネルギーは $m = 0$ のとき

$$E = c|\boldsymbol{p}|$$

これは質量が 0 でも運動量 $|\boldsymbol{p}| = E/c$ を持つことを意味し、速度は

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{E}{c^2}|\boldsymbol{v}| = \frac{E}{c} \ \Rightarrow \ |\boldsymbol{v}| = c$$

から、光速です。このように質量が 0 の粒子は光速で動きます。

4 元運動量の p^0 はエネルギーを使って

$$p^0 = mu^0 = \gamma_v mc = \frac{1}{c}\gamma_v mc^2 = \frac{E}{c}$$

と書けることが分かり、4 元運動量は

$$p^\mu = (\gamma_v mc, \gamma_v m\boldsymbol{v}) = (\frac{E}{c}, \boldsymbol{p})$$

と表記されます。4 元運動量の内積は

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^i p^i = \frac{E^2}{c^2} - \gamma_v^2 m^2 |\boldsymbol{v}|^2 &= \gamma_v^2 (m^2 c^2 - m^2 |\boldsymbol{v}|^2) \\ &= \gamma_v^2 m^2 c^2 (1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}) \\ &= m^2 c^2 \end{aligned}$$

と書けて、$p^2 = p_\mu p^\mu$ は静止エネルギーの 2 乗を c^2 で割ったものになります。

力は 3 次元部分としてますが、4 元ベクトルとしての力も作れます。運動方程式は 4 元運動量の 3 次元部分を使って作られているので、4 元加速度に合わせて定義すればいいだけで

$$F^\mu = m\alpha^\mu = \frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = \gamma_v \frac{d}{dt}(mu^\mu)$$

$\mu = 0$ では、3 次元成分は運動方程式での力 $\boldsymbol{f}$ によって

$$F^0 = \gamma_v \frac{d}{dt}(mu^0) = \gamma_v \frac{d}{dt}(\gamma_v mc) = \gamma_v \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\gamma_v mc^2) = \frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

3 次元成分は

$$\boldsymbol{F} = \gamma_v \frac{d}{dt}(\gamma_v m\boldsymbol{v}) = \gamma_v \boldsymbol{f}$$

よって、力の 4 元ベクトルは

$$F^\mu = (\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}, \gamma_v\boldsymbol{f})$$

と作れます。これと 4 元運動量から、4 元ベクトルによる運動方程式は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

と書けます。3 次元部分は

$$\gamma_v \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \gamma_v \boldsymbol{f}$$
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

となるので、第二法則が出てきます。