

単振動

力学の入り口としてよく扱われる単振動についてです。単振動と呼ばれるものはバネの振動をイメージしてもらえば問題ないです。ここでの話は物理というより数学の段階の話しかしません。

知っている人にはひどく煩わしく感じる書き方をしていると思います。

微分方程式のもう少し細かい話は数学の「1 階線形微分方程式」と「2 階線形微分方程式」でしています。

そもそも物理は現実の現象を方程式で表現した時点 (力学では運動方程式を作った時点) で一旦終わり、その後はその方程式が解けるかどうかという数学の問題に変わります (現象を表現するのにも数学は必要ですが)。そして、解が求まればそこからまた物理に戻り、解が物理としてどのような意味を持つのかを考えることになります。で、物理においては微分方程式が頻繁に現れます (マクスウェル方程式、シュレーディンガー方程式、アインシュタイン方程式、ナビエ・ストークス方程式等々)。そのために基本的な微分方程式の解きかたを単振動を使って示します。ここで出てくる単語が分からない人は、もっと初歩的な本なりサイトなりを見てください。

バネを用意し、振動していない状態の重りの位置を原点として、そこから動いた距離 (変位) を x 、 ω を角振動数、 A を振幅、 α を初期位相としたとき、ある時間 t での x は

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

と表現できます (直線に沿った振動)。ここらへんの単語が分からない人は検索サイトで検索すれば引っかかるのでそっちを見てください。この式で位置を表現できるのは、三角関数は周期を持っていて、バネの振動も周期を持っているからです。イメージとして全く振動が弱まらないバネの振動を考えて、それと三角関数のグラフを当てはめてみてください。

まずはこれを使って運動方程式を作れるので、時間で 2 回微分を行って

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega A \sin(\omega t + \alpha), \quad \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \end{aligned}$$

結果を見てわかるように、 $\cos$ だろうと $\sin$ だろうと最終的には同じ形になっています。後は重りの質量 m をかければいいので運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x = -kx \quad (k = m\omega^2 > 0) \quad (2)$$

最後での k への置き換えは利便性からよく使われ、 $-kx$ を復元力と呼びます。これが単振動での運動方程式になり、単振動を起こすためには力が $-kx$ の形をしていなければならないことが分かります。重りの位置が分かっていると運動方程式を作ったので順序がおかしくなっていますが、運動方程式を解くことは重りの位置を表す関数 $x(t)$ を求めることです。

運動方程式の右辺にマイナスがついているのは計算していったらこうなったというのもそうなんです、実際の運動を考えても妥当なものです。 $-kx$ が復元力と呼ばれるように、バネがもとの位置に戻ろうとする力を表し

ていることを考えれば分かります。例えば、 x が正の位置にいたバネは負の方向に戻ろうと力の方向を負に向け、逆に x が負の位置にいたら力は正の方向を向きます。こういったことから符号にマイナスがつきます。

ここではバネの動きを先に考えてから運動方程式を作りましたが、バネに作用する力を先に与えて運動方程式を作るという手順もあります (フックの法則)。ただ、何も知らない段階で $-kx$ の力が働いていると単振動になるというのにたどり着くのは、バネの動きが三角関数になっていると思いつくのに比べて難しいです。

ちなみに、単振動のことを調和振動と言ったりもし、こういった運動をするもの (粒子) を調和振動子 (harmonic oscillator) と言います。量子力学ではほとんど調和振動子で統一されて使われています。

また、等速円運動も単振動の 1 種です。これは等速円運動の運動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} = (x, y))$$

がバネの振動と同じ形の式になっているからです (円運動では角振動数を角速度と言う)。

運動方程式は微分方程式なので、ここから微分方程式の解き方の話をしていきます。微分方程式を解く最も単純で数学の定理を必要としない方法は積分して微分を消すことなので、それから見ていきます。

- 積分から求める場合 (求積法)

まずは、1 階微分方程式から見ておきます。例えば

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{3}$$

という 1 階微分方程式は単純に積分するだけで

$$\int dt \frac{dx}{dt} = 0$$
$$x = C$$

として一般解 (微分方程式を満たす一般的な解のこと) が求まります。 C は積分定数です。今のように 1 階微分は 1 回積分すれば微分が消えるために、一般解には必ず任意定数 (積分定数) が 1 個含まれます。言い換えれば、1 個の任意定数を含む解が一般解です。これは n 階微分方程式でも同じで、 n 階微分は n 回積分すれば微分が消えるために、一般解は n 個の任意定数を含みます。なので、2 階微分方程式の一般解は 2 個の任意定数を含む解です。

しかし、積分すれば求まるという場合は少なく、例えば c を定数として

$$\frac{dx}{dt} = cx \tag{4}$$

となっているだけで、今のように単純に両辺を積分するだけでは求まらなくなります。両辺を積分しても右辺に求めたい x がいるために積分が実行できないからです。変数 t を省略せずに書けば

$$\int dt \frac{dx(t)}{dt} = c \int dt x(t)$$
$$x(t) = c \int dt x(t)$$

となり、 x の微分が消えて x の積分が残ります。積分を含む式は積分方程式と呼ばれます。

このようになった場合の対処は別の解き方に切り替えるか、積分で解が求まるように式変形を試すかです。今の場合では変数分離という方法で積分から解が求まるようになります。

変数分離は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= cx \\ \frac{dx}{x} &= c dt \\ \int \frac{dx}{x} &= c \int dt\end{aligned}$$

のように、積分に関係する x, t を x は x のみ、 t は t のみの形に分離させることです。2 行目はよく書かれる変形で、微分は微小な Δx を微小な Δt で割っているものなので dx, dt を $\Delta x, \Delta t$ として、左辺に x だけ、右辺には t だけがくるように形式的に行っています。もしくは

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int dx$$

となることを踏まえた形式的な変形とも言えます (形式的はこのような積分の形になることを前提としているという意味)。このように変形すれば、積分が実行できて

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= c \int dt \\ \log |x| &= ct + B' \\ |x| &= e^{ct+B'} \\ x &= Be^{ct}\end{aligned}$$

B' は積分定数で、 $B = \pm e^{B'}$ ($e^{B'} > 0$) です。 B は任意定数になっているので、これは一般解です。このようにして、左辺と右辺で変数を揃えて両辺を別々に積分するというのが変数分離による手順です。変数分離はよく出てくるので覚えておくと便利です。

単振動の微分方程式の一般解を積分から求めます。まず、両辺を積分するだけでは求まらないのは見た目からすぐに分かります。なので、式変形を行います。2 階微分のままでは変数分離ができないので、1 階微分の式にします。微分が

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}$$

となっていることを利用すると、単振動の微分方程式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -\frac{k}{m}\end{aligned}$$

と書けます。そうすると、 $u = x^{-1} dx/dt$ と置くことで

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + u^2 &= -\frac{k}{m} \\ \frac{du}{dt} &= -(u^2 + \frac{k}{m}) \\ -\int \frac{du}{u^2 + \omega^2} &= \int dt \quad (\omega^2 = \frac{k}{m} > 0)\end{aligned}$$

として、変数分離ができます。積分は公式扱いにして

$$\int \frac{du}{u^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{u}{\omega}$$

を使ってしまいます ($u = \omega \tan \theta$ とすれば求まる)。 $\arctan$ は $\tan$ の逆関数 (逆三角関数) で

$$\tan \theta = a, \theta = \arctan a \Leftrightarrow \tan \theta = \tan(\arctan a) = a$$

となっています。積分実行後は

$$\begin{aligned}\arctan \frac{u}{\omega} &= -\omega t + B_1 \\ u &= \omega \tan(-\omega t + B_1)\end{aligned}$$

B_1 は積分定数です。 u を x に戻して、対数の微分から

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= \omega \tan(-\omega t + B_1) \\ \frac{d}{dt} \log x &= \omega \tan(-\omega t + B_1)\end{aligned}$$

t で積分して

$$\begin{aligned}\log x &= \omega \int dt \tan(-\omega t + B_1) \\ &= -\int dz \tan z \quad (z = -\omega t + B_1, dz = -\omega dt) \\ &= \log |\cos z| + B_2\end{aligned}$$

B_2 は積分定数です。 x を取り出すために指数関数にすると、指数関数は正なので

$$\begin{aligned}
|x| &= \exp(\log |\cos z| + B_2) \\
&= e^{B_2} |\cos z| \\
x &= \pm e^{B_2} \cos z \\
&= B'_2 \cos(-\omega t + B_1)
\end{aligned}$$

となり、最初に見た三角関数による解が求まり、これが微分方程式 (2) の一般解です。積分を 2 回しているので任意定数が 2 個出てきています。 $\cos \theta = \cos(-\theta)$ と、任意定数は符号を変えても任意定数のままになることから、(1) の文字に合わせれば

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

と書けます。 $\cos$ でなく $\sin$ にしたいなら、 α を $\alpha - \pi/2$ と置きなおせばいいです。

運動方程式の解を積分から求めるときの典型的な式変形の仕方もあり、それは下の補足で示しています。

このように積分が実行できるなら微分方程式の一般解は素直に求まります。しかし、積分すれば求まるという形に変形できるとは限らないですし、できたとしても積分を実行できるのが問題になります。

別の方法を見ていきます。三角関数を先に定義して運動方程式を求められたように、運動方程式に三角関数を仮定して代入してやれば微分方程式を解けることが予想できます。つまり、微分方程式の形から先に解が予想できるなら、その形を微分方程式に入れて解くという方法があり、実際に振動の問題では一般解を三角関数で仮定して解くという乱暴といえば乱暴な方法を取ることができます。

- 解を仮定する場合

微分方程式の形から解を先に仮定してしまう解き方を見ていきます。まず、(4) で試します。(4) は、左辺に 1 階微分、右辺に x そのものがいます。そうすると、微分で形が変わらない指数関数が解になっていると予想できます。なので、 a をまだ分かっていない定数とし、解を $x = e^{at}$ と仮定して (4) に入れば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{at} &= ce^{at} \\
ae^{at} &= ce^{at} \\
a &= c
\end{aligned}$$

となり、勝手に置いた a が決まります。なので、解が

$$x(t) = e^{ct}$$

と求まります。しかし、任意定数を 1 個含まないので一般解にはなっていません。ここで微分方程式を定数で B 倍してみると

$$B \frac{dx}{dt} = Bcx$$

$$\frac{d}{dt}(Bx) = c(Bx)$$

となり、 Bx も同じ微分方程式を満たすことが分かります。よって

$$x(t) = Be^{ct}$$

としても解のままになり、1 個の任意定数を含むようになるので一般解となります。このように先に解の形を仮定する場合、任意定数をどのように加えるかが問題になります。実際に、 $x = e^{ct} + B$ では、微分方程式を満たさないことはすぐに分かります。

単振動の微分方程式では、最初に見たように三角関数を仮定します。これは、左辺は 2 階微分、右辺は x のみのために、2 回微分してもとに戻る三角関数が解と予想できるためです。しかし、単振動のことは忘れて、微分方程式としてだけ見たとき、任意定数がどう入ってくるのかがはっきりしません。このため数学の定理が必要になります。

結果だけ示します。単振動の微分方程式は同次微分方程式と呼ばれるものに分類され、同次微分方程式において定数倍の関係になっていない解 x_1, x_2 があったとき

$$x(t) = B_1 x_1(t) + B_2 x_2(t) \quad \left(\frac{x_1}{x_2} \neq \text{const} \right)$$

としたものは一般解になります。 const は定数、 B_1, B_2 は任意定数です。もう少し詳しいことは後で触れます (証明は数学の「2 階線形微分方程式」参照)。

そうすると、(2) の解として $\cos(at)$ を仮定すると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$a^2 \cos(at) = \frac{k}{m} \cos(at)$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、この a のときに解になります。 $\sin(bt)$ と仮定しても同じなので、 $a = b$ として解です。そして

$$\frac{\cos(at)}{\sin(at)} \neq \text{const}$$

よって、定数倍になっていない 2 個の解が求まったので、一般解は B_1, B_2 を任意定数として

$$x(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad (5)$$

となります。 a での $\pm\omega$ による符号の違いは任意定数に含められるのでプラスを選んでいきます。(1) と同じにしたいなら、 B_1, B_2 を別の任意定数 A, α によって

$$B_1 = A \cos \alpha, \quad B_2 = -A \sin \alpha$$

と置き換えれば ($\cos, \sin$ の値は $-1 \sim 1$ なので、定数倍をつければ任意の定数になる)、加法定理から

$$x = A \cos(\alpha) \cos(\omega t) - A \sin(\alpha) \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

とできます ($\sin$ にする場合も同様)。

このように、解を仮定することで一般解を求められます。物理で出てくる入門的な微分方程式ではこの方法が一番簡単に求まります。

ここでの微分方程式の性質についてまとめておきます。まず、同次での 2 階微分方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0 \quad (6)$$

という形をしている微分方程式のことです。 a_1, a_2 は与えられている任意の関数です。同次は x の微分方程式において、 x の項を全て左辺に持って行ったときに、右辺が 0 になるという意味です。また、今扱っているのは線形微分方程式と分類されていて、線形は x とその微分の項が全て 1 次になっていることです (x^2 や $(dx/dt)^3$ の項がない)。線形でない場合を扱うことはほとんどないので、線形は外して書かれることが多いです ((6) は同次での線形微分方程式)。

同次の特徴は、解 x_1, x_2 があったとき、その和 $x_1 + x_2$ と定数倍 $C_1 x_1, C_2 x_2$ も解になっていることです。これらは (6) に入れば

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + a_1(t) \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + a_2(t)(x_1 + x_2) \\ &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_2(t)x_1 + \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_2}{dt} + a_2(t)x_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

と

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_1 x_1) + a_1(t) \frac{d}{dt}(C_1 x_1) + a_2(t)(C_1 x_1) = C_1 \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_2(t)x_1 \right) = 0$$

となるためです。そして、 x_1, x_2 が定数倍の関係になっていないとき

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (7)$$

としたものも解なのが分かります。このように、解を定数倍して足したものも解になることを重ね合わせの原理と言います。定数倍になっていないというのは、定数倍 $x_2 = A x_1$ になっていると

$$C_1x_1 + C_2x_2 = C_1x_1 + C_2Ax_1 = (C_1 + C_2A)x_1 = Cx_1$$

として、 x_1 を定数倍した解にしかならないからです。

見て分かるように、重ね合わせの原理による解 (7) は任意定数を 2 個含んでいるので、(6) の一般解です。というわけで、(6) の一般解は、(6) の定数倍になっていない 2 個の解を求めて、それらに任意定数をかけて足せば求まります。これが、解の形を仮定することで一般解が求められる数学的な背景です。

注意ですが、これは同次での話なので、そうでない微分方程式には使えません。その場合は「減衰振動・強制振動」や数学の「線形 2 階微分方程式」でしています。

単振動の一般解は求められましたが、ここから複素数の解を含めた場合を見ておきます。複素数に拡張するとより簡単に求められます。

複素数を使うときに重要な関係式としてオイラーの公式があります。これは指数関数と三角関数の関係として

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

と与えられています。これは絶対に覚えた方がいいです (単振動の微分方程式の解法とオイラーの公式を知っていれば大学で物理を習ったと言い張れるかも)。オイラーの公式は至宝とまで表現される公式です。

まず、積分から求められるように変形する場合から見ます。この解き方は演算子法と名前が付いています (演算子法は非同次微分方程式の解法のことを指しますが、今の場合でも同じ発想)。方法は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \\ 0 &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{m} \right) x \\ &= (D^2 + \frac{k}{m}) x \\ &= (D + i\sqrt{\frac{k}{m}})(D - i\sqrt{\frac{k}{m}}) x \\ &= \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}) \end{aligned}$$

このように変形させるものです。この変形は、見た目的には微分演算子 d/dt を D のようにただの記号に置き換えて、普通の代数と同じように扱うというものです。これができるのは、微分演算子が微分を実行する変数にちゃんと作用しており、もとの式の意味を変えないなら好きに変形していいためです。今の場合での微分演算子に対する要求は、 x に 2 回作用しているというものなので、この変形は式の意味を変えません。なぜなら、2 回微分が作用することは、置き換えを見ても分かるように、2 乗と同じ意味だからです。実際に逆にたどれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x &= \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{dx}{dt} - i\omega x \right) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} - i\omega \frac{dx}{dt} + i\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \end{aligned}$$

となって、もとの式に戻ります。このように、たとえ微分演算子だろうとも、計算規則を破らないなら計算しやすいように変形させてしまえます (微分演算子の意味を数学的にちゃんと理解していない段階では絶対に微分演算子

の逆数を取らない方がいい)。このような変形で注意すべきなのは、 ω^2 の項に t 依存性があるときで、その場合は t 微分がそこにも作用することになり、ここまで綺麗に変形できません。

上のような変形で 2 階微分方程式だったものが、2 個の 1 階微分方程式

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)x = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x = 0$$

となります。これは

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x = \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)x = 0$$

なので、 x にどちらかが作用して 0 になっていればいいからです。見やすく書けば

$$L_+(L_-x) = L_-(L_+x) = 0 \Rightarrow L_-x = 0, \quad L_+x = 0$$

ということです。

このような変形自体は複素数でなくてもできますが、単振動の微分方程式に使うと虚数が式の中に現れてしまいます。なので、実数の範囲で解こうとしていたときには使いませんでした。

$\pm$ で 2 つのパターンがありますが、符号が違っただけ解き方は同じなのでマイナスの方を解きます。それぞれの 1 階微分方程式はすでに見た (4) と同じなので、変数分離を使って

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= i\omega x \\ \frac{dx}{x} &= i\omega dt \\ \int \frac{dx}{x} &= i \int dt \omega \\ \log x &= i\omega t + C \\ x(t) &= e^{i\omega t + C} \\ &= C_1 e^{i\omega t} \quad (C_1 = e^C)\end{aligned}\tag{8}$$

微分方程式の解を複素数まで許しているので、 C は複素数の積分定数です。複素数 z でも

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

なので、実数と同じように実行しています。また、オイラーの公式を使うと、 A, B を実数として

$$e^C = e^{A+iB} = e^A e^{iB} = e^A (\cos B + i \sin B)$$

となるので、 C_1 は複素数の任意定数です。

プラスでも同様なので、 C_2 を複素数の任意定数として

$$x(t) = C_2 e^{-i\omega t}$$

と求めます。もとの微分方程式 (2) に入れれば、どちらも成立しているのが確かめられます。よって、それぞれの解を $x_1(t), x_2(t)$ とすれば、 x_1/x_2 は定数ではないので、一般解は

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

となります。

この解を見たときに物理の人は違和感を持つ必要があります。この解は実数でなく複素数です (実数の変数を複素数にする関数)。そして、 x は重りの位置です。つまり、現実の位置は実数であって虚数なんかは含まないはずなのに、求まったのは複素数です。これは微分方程式の解という意味では正しくても (数学的に正しくても)、物理としては正しいとは限らないという分かりやすい例になっています。

ただし、今の場合では根本的に正しくないというわけではなく、複素数までを許して微分方程式を解いたことが問題を起こしているだけです。なので、一般解を実数に制限してしまえば上で求めた三角関数による実数の一般解にできます。このときに出てくるのがオイラーの公式です。オイラーの公式で三角関数にすると

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t)$$

と書けます。これが実数に制限されるためには、 $C_1 + C_2$ が実数、 $C_1 - C_2$ が純虚数になっていればいいです。そうすると、 $C_1 = B'_1 + iB'_2$ (B'_1, B'_2 は実数) に対して C_2 が

$$C_2 = C_1^* = B'_1 - iB'_2$$

として複素共役の関係になっているとすれば

$$x(t) = 2B'_1 \cos(\omega t) - 2B'_2 \sin(\omega t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

となります。 B_1, B_2 は実数の任意定数なので、実数の一般解 (5) と一致します。よって、実数の一般解は複素数の一般解に $C_1 = C_2^*$ の制限を与えたものです (4 個の実数の任意定数がこの制限で 2 個になる)。

解の形を仮定しても同じようにできます。三角関数でなく指数関数でも解になっているのは予想できるので、 $e^{\lambda t}$ と仮定してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{k}{m} e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となるので、解は

$$x_1 = e^{i\omega t}, \quad x_2 = e^{-i\omega t}$$

となり、一般解は

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

と求められます。このように指数関数 $e^{\lambda t}$ を仮定したときに出てくる λ の 2 次方程式は特性方程式と呼ばれます。この方法は使用できる範囲が広く ($e^{\lambda t}$ を微分方程式に入れた後に $e^{\lambda t}$ が式から消える形なら使える)、解も簡単に求まるので、微分方程式の解き方として最初によく出てきます。ただし、この場合でも、物理としては複素数から実数への制限が必要になることに注意が必要です。なので、単振動の一般解として求めるなら、 $\sin, \cos$ が定数倍でない 2 つの実数の解とすぐに分かるので、これらから (5) とするのが手っ取り早いです。

初めて単振動を勉強するときに重要となるのは、2 階微分方程式の解法、オイラーの公式といったものです。これらは単振動だけでなくあらゆる分野で活躍するので、忘れると一々確かめる羽目になります。後は、振動しているものに対しては解く時に一般解として三角関数や指数関数を仮定して解けることが多いということです。

ついでに、知っておくと計算間違いを見つけることができる方法を説明しておきます。そのために、物理量に対する次元 (dimension) の概念を持ち込みます。乱暴に言えば、次元は単位を抽象化したものです。例えば、長さの単位としては、メートルやらキロメートルやら尺度によっていろいろありますが、結局のところ長さという量に変わりはありません。なので、単位を無視して長さという概念にしまえば非常に便利です。そして、他の基本量となる質量や時間といったものをひっくるめたものを次元と呼びます。電磁気の量を加えると話が面倒になりますが、それ以外では、長さ、質量、時間の 3 個で物理量の次元を与えています。

例えば、力 F は質量 $\times$ 加速度なので、質量を M 、距離を L 、時間を T とすれば、 F の次元は

$$[F] = \frac{ML}{T^2}$$

となります。次元を表すときには $[]$ で囲むことが多いです。これが次元解析と呼ばれるものの基本です。物理量は何かしらの次元を持つので、何かの計算をしていって、その結果次元の違うものが得られたら間違いと分かります。力の計算をしたら、 $M^2 L/T$ の次元になったとかいうのは、どこかで計算間違いをしています。

これと関係した話をついでにしておきます。物理ではよく指数関数 e^x が出てきますが、指数関数の肩に乗っている量は無次元量 (単位を持たない量、例えば円周率 π とか確率とか個数とか) ということです。これは指数のマクローリン展開を見れば分かり、指数は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

と展開されます。このとき x が、例えば長さの次元なんかを持っていると、第 1 項は無次元、第 2 項は長さ、第 3 項は長さの 2 乗...として、式の中で次元の違うものが現われます。で、次元の違うものは足せない (例えば長さと質量の和なんてものは定義されていない)、おかしいことになります。なので、指数関数の肩に乗っているものは次元を持つてはいけません。他にもこのタイプで展開される関数は無次元量となっている必要があります。ただし、対数では $\log[x_1 x_2] = \log x_1 + \log x_2$ と分解できるので $x_1 x_2$ の次元で判断すると間違えます。

最後に単振動の運動エネルギーとポテンシャル (位置エネルギー) を求めます。力学的エネルギーの式に今の結果を入れればいいだけです (導出は下の補足参照)。単振動での結果 $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ (A, α は任意定数) から、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) \quad (v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha))$$

位置エネルギーは

$$U = - \int_0^x dx' F = \int_0^x dx kx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

というわけで、力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}k A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2}k A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}k A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2}k A^2 \end{aligned}$$

見てわかるとおり、力学的エネルギーは定数となり保存されているのが確かめられます (より正確には時間微分で0になる)。

・補足

上で見た手順とは異なる手順で積分から一般解を求めます。そのために、力学的エネルギーを利用します。ただし、先に言っておくと、上で示した手順でもそうですが、単振動の解を積分から求めるのは面倒なだけなので、微分方程式の解き方の例や積分の練習程度の扱いで十分です。

力学的エネルギーを求めるのと同じ手順を行います。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

この両辺に dx/dt をかけて t で積分し

$$m \int \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt = -k \int x \frac{dx}{dt} dt$$

まず、左辺を計算すると

$$\begin{aligned} m \int \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt &= m \int \left(\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} m \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} m \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目へは

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \left(\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt}$$

を使っています。最右辺の $\left(\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \right)$ は微分の作用がその外には作用していないことを表します。やっていることは、微分がかかっている部分を変化させてその帳尻をしているだけです。

右辺は

$$-k \int x \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2} k \int \frac{d}{dt} x^2 dt = -\frac{1}{2} k x^2 \quad \left(\frac{d}{dt} x^2 = 2x \frac{dx}{dt} \right)$$

こちらは簡単な微分による変形なので、わかりやすいです。というわけで、積分定数を C として

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C$$

これで 2 階微分方程式から 1 階微分方程式に変形されました。このように、エネルギー保存の形へと変形すると 1 階微分方程式にできるので、微分方程式の解法の 1 つになっています。後はルートにしてもう 1 回積分すれば解が求まります。

また、書き換えると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

となって、これが単振動での力学的エネルギー保存の式です。左辺の第 1 項が運動エネルギー、第 2 項がポテンシャルです。今行ったように力学的エネルギー保存の式は運動方程式を変形したものであるため、この式を解くことは運動方程式を解くことと同じです。

積分して解を求めます。 k は正と定義されているために左辺は必ず正となるので (質量 m は正で、実数の 2 乗は正)、右辺の C も正です。ここで、 C を定数 A によって

$$C = \frac{1}{2}kA^2$$

と置きます。これは C をこのように置くと計算が楽になるのを知っているからで (後で余計な置き換えをしないで済む)、 C のまま行っても問題はありません。そうすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \\ m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= k(A^2 - x^2) \\ \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \pm \omega \int dt \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}) \\ \int \frac{-\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} d\theta &= \pm \omega t \quad (x = A \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta d\theta) \\ \int \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta &= \pm \omega t \\ -\theta &= \pm \omega t + \alpha \\ \arccos\left(\frac{x}{A}\right) &= \pm \omega t + \alpha \\ \frac{x}{A} &= \cos(\pm \omega t + \alpha) \\ x &= A \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

途中の積分がやや面倒なことになっていますが、上で求めたものと同じ結果になります。 $\cos$ (三角関数) の逆関数 $\arccos$ (逆三角関数) は

$$\cos \theta = a, \theta = \arccos a \Leftrightarrow \cos \theta = \cos(\arccos a) = a$$

と与えられます。最後に $\cos$ 内の $\pm$ は $\cos \theta = \cos(-\theta)$ から、 α に含めています。