## 減衰振動・強制振動

単振動の微分方程式に新しい項が加わった時の微分方程式を解きます。
単振動に抵抗を加えた場合と外力を加えた場合を使います。後半で連立微分方程式を使った話をしていますが、飛ばしてもいいです。
数学の「線形 2 階微分方程式」も見てください。

現実のバネを振動させると徐々に振幅が小さくなって振動しなくなるのは、空気抵抗や摩擦といったものが存在するためです。この抵抗を単振動の運動方程式に組み込みます。
扱いやすい例として、速度に比例する抵抗が存在するとして考えていきます。重りの質量を $m$ として、抵抗 $R$ を

$$R = -2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

このように、バネの速度 $dx/dt$ の比例定数を $2m\gamma$ として定義します ($\gamma > 0$)。2 をつけているのは、後の計算を楽にするためで、深い意味はないです。そうすると、運動方程式の変更は右辺の力に対してなので、バネの位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

という運動方程式に従います。$\omega$ は角振動数で、バネ定数 $k$ とは $k = m\omega^2$ となっています。これが抵抗を考慮した運動方程式です。これを解きます。
$x$ にかかる部分をまとめて

$$0 = m\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma\frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = (\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega^2)x$$

と変形します。これを単振動と同じように、1 階微分だけの形に書き換えます。微分演算子を $D$ として、$D$ による 2 次方程式と思えば、括弧の中が 0 になるには

$$D^2 + 2\gamma D + \omega^2 = 0$$
$$D = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

これより

$$(\frac{d}{dt} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(\frac{d}{dt} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})x = 0 \tag{2}$$

もとに戻るか一応確かめると

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dt}+A_+)(\frac{d}{dt}+A_-)x &= (\frac{d}{dt}+A_+)(\frac{dx}{dt}+A_-x) \quad (A_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2}) \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}+A_-\frac{dx}{dt}+A_+\frac{dx}{dt}+A_+A_-x \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\gamma^2x-(\gamma^2-\omega^2)x \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x
\end{aligned}
$$

となり、もとに戻ります。

後はただの単振動のときと同様にすればいいので、一般解は

$$
x(t) = e^{-\gamma t}(C_1\exp[\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t]+C_2\exp[-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t])
$$

$C_1, C_2$ は任意定数です。exp は指数関数 $e$ のことで、$e^{ax^2+bx}$ のように見づらいときや式が長いときに $\exp[ax^2+bx]$ と書きます。([ ] を使うのは個人的な趣味で、一般的な慣習ではないです)。後はルート部分がどうなっているかで運動が決まります。

$\gamma$ と $\omega$ の大小関係で解の性質が変わります。　$\gamma^2-\omega^2<0$（抵抗が復元力に対して小さいとき）では

$$
\sqrt{\gamma^2-\omega^2} \ \Rightarrow\ i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}
$$

として虚数 $i$ が出てくるので

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\gamma t}\big(C_1\exp[i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t]+C_2\exp[-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t]\big) \\
&= e^{-\gamma t}\big((C_1+C_2)\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t)+i(C_1-C_2)\sin(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t)\big) \\
&= Ae^{-\gamma t}\cos\big(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\alpha\big)
\end{aligned}
$$

$A, \alpha$ は任意定数です。途中計算を省いてますが、「単振動」での変形と同じです。

単振動と違い、$\exp[-\gamma t]$ がいます。これはマイナスのついた指数関数なので、時間が経てば ($t$ の増加によって)$x$ は 0 に収束することを言っています。つまり、この式は振動が時間経過とともに減衰していくことを表しています。なので、こういったものを減衰振動と言います。また、$Ae^{-\gamma t}$ が振幅部分なので、振幅が時間依存していることにもなっています (単振動では振幅は一定で三角関数の周期によってバネの位置 $x$ が変動している)。

今度は $\gamma^2-\omega^2>0$（復元力に対して抵抗が大きい）として

$$
x(t) = e^{-\gamma t}\big(C_1\exp[\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t]+C_2\exp[-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t]\big)
$$

式を見やすくするために

$$
\lambda_1 = \gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\ ,\ \lambda_2 = \gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}
$$

とすれば、$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ によって

$$x(t) = C_1 \exp[-\lambda_1 t] + C_2 \exp[-\lambda_2 t] \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2)$$

見て分かるように、時間経過で 0 に近づいていきます。しかし、第 1 項と第 2 項が同時に 0 にならなく、$\lambda_2 > \lambda_1$ から第 2 項のほうが早く減衰します (早く 0 に近づく)。このため、第 1 項と第 2 項で減衰の仕方が異なり、非周期的に 0 に近づきます。こういったものを過減衰と呼びます。

最後に $\gamma^2 - \omega^2 = 0$ の場合では

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\big(C_1 \exp[\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t] + C_2 \exp[-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t]\big) \\ &= Ce^{-\gamma t} \end{aligned} \tag{3}$$

しかし、$x$ は $\gamma^2 - \omega^2 = 0$ での 2 階微分方程式 (1) の解なので、(1) の一般解であるなら 2 個の任意定数がいるはずです。実際に、本来は 2 個の任意定数を含むことを (1) を解きなおして確かめます。ちなみに、$\gamma^2 - \omega^2 = 0$ では

$$(\frac{d}{dt} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(\frac{d}{dt} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})x = 0 \ \Rightarrow \ (\frac{d}{dt} + \gamma)^2 x = 0$$

このため、(3) は

$$(\frac{d}{dt} + \gamma)x = 0$$

の解です。つまり、(2) と違い 1 つの 1 階微分方程式になってしまっているために、任意定数が 1 つしか出てこなかったということです。

これを修正するために、$C$ を $t$ の関数として (3) を入れます。そうすると、「$'$」を $t$ 微分として

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{d}{dt} + \gamma)^2 C(t) e^{-\gamma t} \\ &= (\frac{d}{dt} + \gamma)(\frac{d}{dt}(C(t)e^{-\gamma t}) + \gamma C(t) e^{-\gamma t}) \\ &= (\frac{d}{dt} + \gamma)(C'(t)e^{-\gamma t} - \gamma C(t)e^{-\gamma t} + \gamma C(t) e^{-\gamma t}) \\ &= (\frac{d}{dt} + \gamma)(C'(t)e^{-\gamma t}) \\ &= C''(t)e^{-\gamma t} - \gamma C'(t)e^{-\gamma t} + \gamma C'(t)e^{-\gamma t} \\ &= C''(t)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

これを積分して

$$\int C''(t)dt = 0 \ \Rightarrow \ C'(t) = A$$

$$\int C'(t)dt = 0 \ \Rightarrow \ C(t) = At + B$$

というわけで

$$x(t) = (At + B)e^{-\gamma t}$$

任意定数が 2 つになったので、これが一般解です。$At$ として時間依存性が $e^{-\gamma t}$ とは別にあるので、これも非周期的に減衰していきます。これを臨界振動といいます。

ここまでは抵抗のある場合を見てきましたが、今度はバネに外部から力 (外力) が作用しているとします。このときは一般的に

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = R(t) \tag{4}$$

と書けます ($P, Q, R$ は適当な関数)。これの厄介な点は、右辺が 0 になっていないことです。こういった右辺が 0 にならない方程式を非同次方程式 (inhomogeneous equation)、もしくは非斉次方程式と言い、右辺がゼロなら同次方程式 (homogeneous equation)、もしくは斉次方程式といいます。同次に比べて非同次では解くのが面倒になります。

例として、単振動に外力 $F\cos(\omega t)$ が作用している場合を解いていきます。この加える力は三角関数によるものなので、周期的な力です。単振動に $F\cos(\omega t)$ を作用させるので、$P(t) = 0, Q = m\omega_0^2, R(t) = F\cos(\omega t)$ として

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = F\cos(\omega t) \tag{5}$$

紛らわしいかもしれませんが、単振動での角振動数を $\omega_0$、加わっている力の $t$ の係数を $\omega$ としています。この非同次の 2 階微分方程式の一般解を求めます。

非同次方程式の一般解は (5) の右辺をゼロにしたときの一般解と、(5) の適当な解を足すことで求められます。適当な解を特解や特殊解と言います。より詳しいことは、数学の「線形 1 階微分方程式」を見てください。

というわけで、まずは右辺を 0 とします。同次では $x(t)$ の代わりに $y(t)$ を使うことにします。0 ではただの単振動の式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m\omega_0^2 y = 0$$

なので、一般解は $a, \alpha$ を任意定数として

$$y(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{6}$$

これを補助方程式の一般解と言ったりします。後はこれに (5) の特解を足します。

特解を求めます。ここでは単純な方法を使います。今の特解は

$$x_p(t) = B\cos(\omega t)$$

このような形をしていると仮定します。$B$ は適当な定数で、特解を $x_p$ と表記しています。$x_p$ は解なので、(5) に入れて等式が成立するように $B$ を決定します。$x_p$ を (5) に入れれば

$$\begin{aligned}-Bm\omega^2\cos(\omega t) + m\omega_0^2 B\cos(\omega t) &= F\cos(\omega t)\\ B(\omega_0^2-\omega^2) &= \frac{F}{m}\\ B &= \frac{F}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}\end{aligned}$$

として、$B$ が求まります。というわけで、特解 $x_p$ は

$$x_p(t) = \frac{F}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t)$$

よって、(12) と $x_p$ を足して

$$x(t) = y(t) + x_p(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$

とすれば、(5) の一般解になります。

第 2 項の分母を見ると、$\omega_0 = \omega$ となったときに無限大に発散します。つまり、振幅が無限大になってしまいます。これを振幅共鳴と言います。しかし、実際の現象としては、抵抗の影響で振幅が無限大になるわけがないと日常的な感覚でわかります。

こういった外力による影響はよくある理科実験でやるような、振動に合わせて外から力を加えると共鳴して振幅が大きくなっていくというのを表しています。

抵抗があれば $\omega_0 = \omega$ でも発散しないことを見るために、(5）にさらに抵抗の項を加えた

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F\cos(\omega t) \tag{7}$$

もついでに解いておきます。これも同じ方法で簡単に解けます。右辺が 0 なら (1) になるので、同次での一般解は

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}\big(C_1\exp[\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t] + C_2\exp[-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t]\big)$$

となります。

特解を求めるために、解の形を

$$x_2(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

と仮定します。これを (7) に入れれば、左辺は

$$-\omega^2(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)) - 2\gamma\omega(B_1 \sin(\omega t) - B_2 \cos(\omega t)) + \omega_0^2(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t))$$

cos と sin の項を分けることで

$$-\omega^2 B_1 + 2\gamma\omega B_2 + \omega_0^2 B_1 = \frac{F}{m} \tag{8a}$$

$$-\omega^2 B_2 - 2\gamma\omega B_1 + \omega_0^2 B_2 = 0 \tag{8b}$$

となり、(8b) から

$$B_2 = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} B_1$$

これを (8a) に入れれば、$B_1$ は

$$\begin{aligned}
-\omega^2 B_1 + \frac{4\gamma^2\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} B_1 + \omega_0^2 B_1 = \frac{F}{m} \\
B_1 &= \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{-\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2 + \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \\
&= \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 + 4\gamma^2\omega^2} \\
&= \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}$$

これで、$B_2$ も求まり特解は

$$x_2(t) = \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{F}{m} \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin(\omega t)$$

となります。

よって、一般解は

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 \\
&= e^{-\gamma t}(C_1 \exp[\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t] + C_2 \exp[-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t]) + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\ ,\ B_2 = \frac{F}{m}\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

となります。これは $\omega_0 = \omega$ でも発散しません。

非同次方程式の特解を求める方法について補足しておきます。今回使った方法は、適当に解の形を仮定してもとの方程式に入れて、方程式を満たすように係数を決めるというものです。この適当な解の形は、(4) の右辺と同じ形に選ぶと上手くいきやすいです。ここで見てきたのは、右辺が $\cos(\omega t)$ なので、それと同じ形を仮定しました。こういった方法で求めることを未定係数法と呼びます。一般には、右辺が

$$R(t) = (t\ \text{の式}) \times e^{at} \times (\sin\alpha t, \cos\beta t\ \text{の式})$$

のような場合、これに合わせるように形を決めます。今回は cos 部分だけだったので、そこだけを取り出しています。他の求め方として演算子法とかがありますが、このやり方が一番簡単で大抵の問題に使えるので、覚えておくと便利です。

ここからはついでの話です。抵抗と外力を加えた方程式 (7) を変形していくと連立微分方程式が出てくるので、それを使って連立微分方程式の解き方を示します。連立微分方程式を解くことより、その形に持っていくまでのほうが長いので、面倒なら (13a) まで一気に飛ばしてください。また、ここから求めるものは近似解です。

連立方程式を出すために、(7) の解の形が

$$x = a(t)\cos(\omega t + \alpha(t))$$

となる場合を知りたいとします。なぜなら、抵抗や外力があるときの結果からは、振幅部分に時間依存性があるように見えるからです (一般的に、抵抗や外力があると振幅と位相は時間依存する)。この形の解が分かれば、すぐに振幅と位相の時間依存性が分かって便利です。ただ、この形から始めるよりは

$$x = C_1(t)\cos(\omega t) + C_2(t)\sin(\omega t) \tag{9}$$

とした方が計算しやすいので、こっちを使い、任意定数 $C_1, C_2$ が時間 $t$ に依存しているとします。2 つの間の関係は

$$x = a(t)\cos(\omega t + \alpha(t)) = a(t)\cos(\omega t)\cos(\alpha(t)) - a(t)\sin(\omega t)\sin(\alpha(t))$$

から

$$C_1(t) = a(t)\cos(\alpha(t))\ ,\ C_2(t) = -a(t)\sin(\alpha(t))$$

となっています。

このように時間依存させた $C_{1,2}(t)$ は時間微分による方程式から決定するしかないですが、方程式は (7) しかないので、2 つの未知関数 $C_{1,2}(t)$ を解くためには 1 つ方程式が足りません ((9) を (7) に入れても $C_{1,2}(t)$ の式になるので決定できない)。というわけで、1 階微分を含んだ条件を加えて、制限をかけます。(9) を (7) に入れる $C_{1,2}$ の 2 階微分が出てきますが、それが出ないように

$$\frac{dC_1(t)}{dt}\cos(\omega t)+\frac{dC_2(t)}{dt}\sin(\omega t)=0$$

とします。これによって 2 階微分は出てこなくなります。
　というわけで

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F\cos(\omega t) \tag{10a}$$

$$\frac{dC_1(t)}{dt}\cos(\omega t)+\frac{dC_2(t)}{dt}\sin(\omega t)=0 \tag{10b}$$

この 2 つの方程式を解いていきます。
　(7）の $t$ 微分を (10b）を使って計算します。1 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{dC_1(t)}{dt}\cos(\omega t)-C_1(t)\sin(\omega t)+\frac{dC_2(t)}{dt}\sin(\omega t)+C_2(t)\cos(\omega t)\\&\Rightarrow\ -\omega C_1(t)\sin(\omega t)+\omega C_2(t)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

2 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&\Rightarrow\frac{d}{dt}\big(-\omega C_1(t)\sin(\omega t)+\omega C_2(t)\cos(\omega t)\big)\\&=\ -\omega\frac{dC_1}{dt}\sin(\omega t)-\omega^2C_1(t)\cos(\omega t)+\omega\frac{dC_2}{dt}\cos(\omega t)-\omega^2C_2(t)\sin(\omega t)\\&=\omega\big(-\frac{dC_1}{dt}\sin(\omega t)+\frac{dC_2}{dt}\cos(\omega t)\big)-\omega^2\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)\end{aligned}$$

矢印で (10b) を使っていることを表しています。これらを (10a）に入れると

$$\begin{aligned}&\omega\Big(-\frac{dC_1}{dt}\sin(\omega t)+\frac{dC_2}{dt}\cos(\omega t)\Big)-\omega^2\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)\\&+2\gamma\big(-\omega C_1(t)\sin(\omega t)+\omega C_2(t)\cos(\omega t)\big)+\omega_0^2\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)=\frac{F}{m}\cos(\omega t)\end{aligned}$$

(10b）での

$$\frac{dC_1(t)}{dt}=-\frac{dC_2(t)}{dt}\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}$$

を使うことで、$dC_{1,2}/dt$ に対する 2 つの方程式に書き換えられて、$dC_1/dt$ では

$$
-\omega\frac{dC_1(t)}{dt}-\omega^2\sin(\omega t)\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)+2\gamma\sin(\omega t)\big(-\omega C_1(t)\sin(\omega t)+\omega C_2(t)\cos(\omega t)\big)
$$

$$
+\omega_0^2\sin(\omega t)\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)=\frac{F}{m}\sin(\omega t)\cos(\omega t) \tag{11}
$$

$dC_2/dt$ では

$$
\omega\frac{dC_2(t)}{dt}-\omega^2\cos(\omega t)\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)+2\gamma\cos(\omega t)\big(-\omega C_1(t)\sin(\omega t)+\omega C_2(t)\cos(\omega t)\big)
$$

$$
+\omega_0^2\cos(\omega t)\big(C_1(t)\cos(\omega t)+C_2(t)\sin(\omega t)\big)=\frac{F}{m}\cos^2(\omega t) \tag{12}
$$

この 2 つの方程式を初期条件のもとで解けば、時間依存している振幅 $C_{1,2}(t)$ を決定できます。しかし、こんな面倒そうな方程式をまともに解くのは大変です。というわけで、さらに条件を加えます。

今度は解に相当強い制限をかけることになる条件を加えます。$C_{1,2}(t)$ と時間依存させていますが、時間変化に対してほとんど変化しないと仮定します。これは、ある時間の範囲内 $t_0\sim T$ での $C_{1,2}(t)$ を全部足し、その時間範囲で割れば (時間経過での平均を取る)、$C_{1,2}(t)$ になるという仮定です。$C_{1,2}(t)$ の和は、時間は連続値なので、積分で書けます。それを時間の範囲 $T-t_0$ で割れば平均になり

$$
\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}dt'C_{1,2}(t')
$$

これが $C_{1,2}(t)$ になるとします。つまり、$C_{1,2}(t)$ の平均を取る積分が

$$
\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}dt'C_{1,2}(t')=C_{1,2}(t)\ \Leftrightarrow\ \frac{C_{1,2}(t)}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}dt'=C_{1,2}(t)
$$

となっていると仮定します。右側を見れば分かるように、平均の積分において $C_{1,2}$ を定数とした場合を求めるということです。

この仮定のもとで (11),(12) を積分します。積分は、時間範囲を 1 周期とし、$T$ を周期として ($t_0=0$)

$$
\frac{1}{T}\int_0^T dt' \qquad (T=2\pi/\omega)
$$

$C_1, C_2$ が定数扱いになるので、三角関数の積分

$$
\int_0^T\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt=[\frac{\sin^2(\omega t)}{2\omega}]_0^T=\frac{\sin^2(2\pi)}{2\omega}=0
$$

によって、いくつかの項が消えます。というわけで、(11) を $t$ で積分し、$T$ で割ると

$$
\frac{1}{T}\int_0^T dt(-\omega\frac{dC_1(t)}{dt}-\omega^2C_2(t)\sin^2(\omega t)-2\omega C_1(t)\gamma\sin^2(\omega t)+\omega_0^2C_2(t)\sin^2(\omega t))=0
$$

$\sin^2, \cos^2$ の積分は

$$\int dx \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \ , \ \int dx \cos^2 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

なので

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sin^2(\omega t))dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega T} \sin^2(t')dt' = \frac{1}{\omega}\frac{1}{2}\omega T = \frac{T}{2} \\
&\int_0^T \cos^2(\omega t))dt = \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

これらを使うことで

$$\begin{aligned}
-\omega\frac{dC_1(t)}{dt} - \frac{1}{2}\omega^2 C_2(t) - \omega C_1(t)\gamma + \frac{1}{2}\omega_0^2 C_2(t) = 0 \\
2\omega\frac{dC_1(t)}{dt} + 2\omega\gamma C_1(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)C_2(t)
\end{aligned}$$

(12) でも同じようにすることで

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T dt(\omega\frac{dC_2(t)}{dt} - \omega^2 C_1(t)\cos^2(\omega t) + 2\gamma\omega C_2(t)\cos^2(\omega t) + \omega_0^2 C_1(t)\cos^2(\omega t)) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\frac{F}{m}\cos^2(\omega t) \\
\omega\frac{dC_2(t)}{dt} - \frac{1}{2}\omega^2 C_1(t) + \gamma\omega C_2(t) + \frac{1}{2}\omega_0^2 C_1(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m} \\
2\omega\frac{dC_2(t)}{dt} + 2\gamma\omega C_2(t) = \ -(\omega_0^2 - \omega^2)C_1(t) + \frac{F}{m}
\end{aligned}$$

よって、(10a),(10b) は

$$\begin{aligned}
2\omega\frac{dC_1(t)}{dt} + 2\gamma\omega C_1(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)C_2(t) \\
2\omega\frac{dC_2(t)}{dt} + 2\gamma\omega C_2(t) = -(\omega_0^2 - \omega^2)C_1(t) + \frac{F}{m}
\end{aligned}$$

として、$C_{1,2}$ に対する連立した線形微分方程式になります。これを解けば $C_{1,2}$ の時間変化がわかります。

この連立微分方程式を使って、連立微分方程式の解き方を説明します。今解きたい連立微分方程式は

$$a\frac{dC_1}{dt} + cC_1(t) + eC_2(t) = 0 \tag{13a}$$

$$a\frac{dC_2}{dt} + cC_2(t) - eC_1(t) = f \tag{13b}$$

この形をより一般化して書けば

$$
\begin{aligned}
a_1\frac{dx}{dt}+c_1x+b_1\frac{dy}{dt}+d_1y=F(t)\\
a_2\frac{dx}{dt}+c_2x+b_2\frac{dy}{dt}+d_2y=G(t)
\end{aligned}
$$

$F, G$ は適当な関数です。これの微分演算子を $D$ として

$$
\begin{aligned}
(a_1D+c_1)x+(b_1D+d_1)y=F(t)\\
(a_2D+c_2)x+(b_2D+d_2)y=G(t)
\end{aligned}
$$

これを微分のない連立方程式と見なします。そうすると、クラメルの公式から $x, y$ は

$$
x=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F(t) & b_1D+d_1 \\ G(t) & b_2D+d_2 \end{vmatrix}\ ,\ y=\begin{vmatrix} a_1D+c_1 & F(t) \\ a_2D+c_2 & G(t) \end{vmatrix}\ ,\ \Delta=\begin{vmatrix} a_1D+c_1 & b_1D+d_1 \\ a_2D+c_2 & b_2D+d_2 \end{vmatrix}
$$

| | は行列式です。これを計算することで連立微分方程式の解 $x, y$ が求まります。

(13a),(13b) での $\Delta$ は

$$
\Delta=\begin{vmatrix} aD+c & e \\ -e & aD+c \end{vmatrix}=(aD+c)^2+e^2
$$

$C_1$ は

$$
C_1=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & e \\ f & aD+c \end{vmatrix}=-\frac{e}{\Delta}f
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Delta C_1=&-ef\\
(aD+c)^2C_1+e^2C_1=&-ef\\
\Big(a^2\frac{d^2}{dt^2}+2ac\frac{d}{dt}+c^2+e^2\Big)C_1=&-ef
\end{aligned}
$$

右辺が 0 のときでは

$$
\Big(\frac{d}{dt}-\frac{-c+ie}{a}\Big)\Big(\frac{d}{dt}-\frac{-c-ie}{a}\Big)C_1=0
$$

から

$$C_1 = A_1 \exp[-\frac{c+ie}{a}t] + A_2 \exp[-\frac{c-ie}{a}t]$$

と分かります。特解は $C_1$ が定数であるとすればすぐに

$$-\frac{fe}{h^2} \quad (h^2 = c^2 + e^2)$$

と分かるので

$$C_1 = A_1 \exp[-\frac{c+ie}{a}t] + A_2 \exp[-\frac{c-ie}{a}t] - \frac{fe}{h^2}$$

$C_2$ はこれを (13a) に入れることで

$$(aD+c)C_1 + eC_2 = 0$$
$$-(c+ie)A_1 \exp[\cdots] - (c-ie)A_2 \exp[\cdots] + cA_1 \exp[\cdots] + cA_2 \exp[\cdots] - \frac{fce}{h^2} + eC_2 = 0$$

exp 内を「$\cdots$」で省略しました ($A_1$ とで $c+ie$、$A_2$ とで $c-ie$)。なので

$$C_2 = iA_1 \exp[-\frac{c+ie}{a}t] - iA_2 \exp[-\frac{c-ie}{a}t] + \frac{fc}{h^2}$$

この解が (13b) を満たすことを確かめると

$$\begin{aligned}(aD+c)C_2 - eC_1 = & -i(c+ie)A_1 \exp[\cdots] + i(c-ie)A_2 \exp[\cdots] + icA_1 \exp[\cdots] - icA_2 \exp[\cdots] \\ & - eA_1 \exp[\cdots] - eA_2 \exp[\cdots] + \frac{fe^2}{h^2} + \frac{fc^2}{h^2} \\ = & \, f\end{aligned}$$

このように成立しています。

　というわけで

$$C_1(t) = A_1 e^{-\gamma t} \exp[-\frac{ie}{a}t] + A_2 e^{-\gamma t} \exp[\frac{ie}{a}t] - \frac{fe}{c^2+e^2}$$
$$C_2(t) = iA_1 e^{-\gamma t} \exp[-\frac{ie}{a}t] - iA_2 e^{-\gamma t} \exp[\frac{ie}{a}t] + \frac{fc}{c^2+e^2}$$

$a, c, e, f$ は

$$a = 2\omega \ , \ c = 2\gamma\omega \ , \ e = -(\omega_0^2 - \omega^2) \ , \ f = \frac{F}{m}$$

これが $C_{1,2}$ の解になります。

このように、連立微分方程式は、微分演算子をただの変数の 1 つと見なして通常の連立方程式でのクラメルの公式を使うと、解けます。

一応求められた解がなんなのか見ておきます。(9) に入れれば

$$\begin{aligned}
x &= e^{-\gamma t}A_1\big(\cos(\frac{e}{a}t) - i\sin(\frac{e}{a}t)\big)\cos(\omega t) + e^{-\gamma t}A_2\big(\cos(\frac{e}{a}t) + i\sin(\frac{e}{a}t)\big)\cos(\omega t) \\
&\quad + ie^{-\gamma t}A_1\big(\cos(\frac{e}{a}t) - i\sin(\frac{e}{a}t)\big)\sin(\omega t) - ie^{-\gamma t}A_2\big(\cos(\frac{e}{a}t) + i\sin(\frac{e}{a}t)\big)\sin(\omega t) \\
&\quad - \frac{fe}{c^2+e^2}\cos(\omega t) + \frac{fc}{c^2+e^2}\sin(\omega t) \\
&= e^{-\gamma t}A_1\big[\cos(\frac{e}{a}t)\cos(\omega t) + \sin(\frac{e}{a}t)\sin(\omega t) - i\sin(\frac{e}{a}t)\cos(\omega t) + i\cos(\frac{e}{a}t)\sin(\omega t)\big] \\
&\quad + e^{-\gamma t}A_2\big[\cos(\frac{e}{a}t)\cos(\omega t) + \sin(\frac{e}{a}t)\sin(\omega t) + i\sin(\frac{e}{a}t)\cos(\omega t) - i\cos(\frac{e}{a}t)\sin(\omega t)\big] \\
&\quad - \frac{fe}{c^2+e^2}\cos(\omega t) + \frac{fc}{c^2+e^2}\sin(\omega t) \\
&= e^{-\gamma t}A_1\big[\cos(\frac{e}{a}t - \omega t) - i\sin(\frac{e}{a}t - \omega t)\big] + e^{-\gamma t}A_2\big[\cos(\frac{e}{a}t - \omega t) + i\sin(\frac{e}{a}t - \omega t)\big] \\
&\quad - \frac{fe}{c^2+e^2}\cos(\omega t) + \frac{fce}{c^2+e^2}\sin(\omega t) \\
&= e^{-\gamma t}A_1\exp\big[-i(\frac{e}{a} - \omega)t\big] + e^{-\gamma t}A_2\exp\big[i(\frac{e}{a} - \omega)t\big] - \frac{fe}{c^2+e^2}\cos(\omega t) + \frac{fc}{c^2+e^2}\sin(\omega t) \\
&= e^{-\gamma t}A_1\exp\big[-i(\frac{-(\omega_0^2-\omega^2)}{2\omega} - \omega)t\big] + e^{-\gamma t}A_2\exp\big[i(\frac{-(\omega_0^2-\omega^2)}{2\omega} - \omega)t\big] \\
&\quad + \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{F}{m}\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\sin(\omega t) \\
&= e^{-\gamma t}A_1\exp\big[i\frac{\omega_0^2+\omega^2}{2\omega}t\big] + e^{-\gamma t}A_2\exp\big[-i\frac{\omega_0^2+\omega^2}{2\omega}t\big] \\
&\quad + \frac{F}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{F}{m}\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項は厳密解と異なっていますが、第 3 項と第 4 項は一致しています。そして、$t$ が十分大きいときには、第 1 項と第 2 項が消えることから、この解は時間 $t$ が十分大きなところを表す近似解になっています。また、第 1 項と第 2 項に抵抗の寄与が $e^{-\gamma t}$ しかないことから、$e^{-\gamma t}$ だけで減衰の仕方が決まるような領域を表しているとも考えられ、そんな領域は減衰がほぼ終わっているところです。

このような結果になったのは、条件として $C_{1,2}$ の時間変化はほとんどないというのを入れたためです。時間が十分たって振動が減衰しきったところでは、$C_{1,2}$ の変化はほぼなくなるために、この条件に対応した状況になります。時間変化がほぼないことは、$C_{1,2}$ の時間依存性がほぼ無視できるということなので、$C_{1,2}$ が時間依存しない解 (第 3 項と第 4 項のみの解) のあたりを導いているとも言えます。