波動方程式

普通は力学の項目の中で波動方程式は出てきませんが、ついでにしてしまいます。
座標変換を使った話の例にもなるので、波動方程式の座標変換も行います。
波動方程式の解き方については数学の「1 次元波動方程式」を見てください。
また、後半のラプラシアンを書き換えるときの関係は数学の「極座標の関係」を見てください。

xy 平面において何かしらの形を表す関数を f として（$y = f(x)$ のグラフ)、これが一定の速度 v で x 方向へ形を変えずに動いているとすると

$$f(x - vt)$$

と書けます。最初の位置 x から t 秒後に vt だけ動いた場所に動くということです。例えば、$t = 0$ の瞬間の形 $f(x)$ における $x = 0$ の位置は $f(0)$ で、ここから時間が $t = t_0$ となったとき形が変わらないことから $f(0) = f(x - vt_0)$ である必要があります。このため、x は vt_0 となり、x 方向へ vt_0 だけ動くことが分かるので、$f(x - vt)$ で正しいことになります。逆に $-x$ 方向なら $x + vt$ になります。

このように何かを表す形がその形を変えずに空間を伝わっていく現象を波 (wave) と言い、関数 f は波の形と伝わる方向と速度の情報を持っています。波という単語はかなり曖昧で、もっと広い意味で使われたりもします。例えば、「弦の振動」での弦の振動は空間を伝わって移動しないですが波として扱われるために定常波 (standing wave, stationary wave) と呼び、移動する波を進行波 (travelling wave progressive wave) と呼んで区別しています (どちらも波動方程式に従う)。ただし、(1) のように定常波は進行波の重ね合わせとして作れるので、この意味では定常波も移動する波の 1 つの形と言えます。

こういった波 (進行波) を表す関数は沢山ありますが、その中で多用されるものは

$$f(x - vt) \ \Rightarrow \ A\sin(k(x - vt)),\ A\cos(k(x - vt))$$

といった三角関数を使ったものです。sin では正弦波 (sine wave, sinusoidal wave)、cos では余弦波と呼ばれるます。ただし、sin と cos は $\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2)$ として $\pi/2$ だけズレているだけなので、どちらでも正弦波と言われます。また、harmonic wave と呼ばれたりもします。

反対方向に進む正弦波を重ねあわせると、加法定理から

$$\begin{aligned}
&A\sin(k(x - vt)) + A\sin(k(x + vt)) \\
&\quad = A(\sin(kx)\cos(-kvt) + \cos(kx)\sin(-kvt) + \sin(kx)\cos(kvt) + \cos(kx)\sin(kvt)) \\
&\quad = 2A\sin(kx)\cos(kvt)
\end{aligned} \tag{1}$$

となり、これは定常波の形です。このように、反対向きの進行波の重ね合わせとして定常波は作れます。

波で使われる単語と関係をまとめていきます（単振動での単語と定義は同じ)。正弦波として

$$A\sin(k(x - vt)) = A\sin(kx - \omega t) \quad (\omega = kv)$$

と書いたとき、A は振幅 (amplitude)、k は波数 (wave number)、ω は角振動数（angular frequency)、$kx - \omega t$ は位相 (phase)、v は位相速度 (phase velocity) と呼ばれます。sin の中は無次元になる必要があるので、波数の次元は長さの逆です。sin は 2π でもとに戻るので

$$\sin(kx - \omega t) = \sin(kx - \omega t \pm 2\pi) = \sin(kx - \omega(t \pm \frac{2\pi}{\omega}))$$

もとに戻る時間 $T = 2\pi/\omega$ を周期 (period) と言います。同様に、もとに戻る x の長さは

$$kx \pm 2\pi = k(x \pm \frac{2\pi}{k}) = k(x \pm \lambda)$$

として λ で与えられ、λ を波長 (wave length) と呼びます。周期を速度 v で書けば

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$$

となり、もとに戻るまでの x の長さ λ を速度で割るという分かりやすい形になります。
ある時間 T_0 を周期 T で割ると、周期が T_0/T 回繰り返されることを表します。このとき、単位時間あたりの回数 $\nu = 1/T$ のことを振動数 (frequency) と言います。角振動数は単位時間とせずに

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

として、1 周する角度 2π を周期で割っているために角振動数と呼ばれます。振動数とは

$$\omega = 2\pi\nu$$

となっています。
　波の形 $f(x)$ が従う方程式を求めます。そのために、$f(x - vt)$ を t と x で偏微分します。まず

$$x - vt = \alpha$$

として、2 変数なので偏微分によって

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = -v\frac{d}{d\alpha} f(\alpha)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} f(\alpha)$$

この 2 つを見比べると、もう 1 回微分したら符号が同じになりそうなので、もう 1 回作用させて

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\big(-v\frac{d}{d\alpha} f(\alpha)\big) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{d}{d\alpha}\big(-v\frac{d}{d\alpha} f(\alpha)\big) = v^2\frac{d^2}{d\alpha^2} f(\alpha)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{d}{d\alpha}\frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2} f(\alpha)$$

これで符合も一致したので

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\alpha) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\alpha)$$

という 2 階偏微分方程式になります。このような波を記述する 2 階偏微分方程式を波動方程式 (wave equation) と呼んでいます。　波動方程式の例として単純なのが「弦の振動」で求めている弦の振動です。他にも電磁波も波動方程式で表せます。

波動方程式は $x - vt$ を変数に持つものだけでなく、$x + vt$ を変数に持つ関数 g をくっつけて

$$f(x - vt) + g(x + vt)$$

としても同じ結果になり、これをダランベールの解と言います。また、波動方程式の複素共役を取ってみると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f^*(\alpha) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^*(\alpha)$$

となるので、もとの波動方程式の解 f の複素共役 f^* も解になっています。

そして、波動方程式の異なる解が 2 つあるとして、それらを f_1, f_2 としたとき、これらの和

$$C_1f_1(x,t) + C_2f_2(x,t)$$

も波動方程式の解になります (C_1, C_2 は定数)。こういったものも解として満たすことは、2 つの波が存在し、それらがぶつかった場所では、2 つの波による影響を合わせた波ができることを意味します。これは日常的な体験 (実験) からそうなるのが当たり前と思うことですが、波動方程式はこういった波の性質を自然と含みます。この波の性質は重ね合わせの原理 (principle superposition) と呼ばれます。

波動方程式は書き換えれば

$$(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(t,x) = 0$$

α の依存性を t, x と書いています。これは右辺が 0 の形ですが、一般化するなら 0 でない場合も考えられて

$$(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f(t,x) = J(t,x)$$

この形も波動方程式と呼ばれます。右辺の関数 $J(t,x)$ が例えば

$$J(t,x) = af(t,x)$$

のように $f(t,x)$ の 1 次までを含むときは線形波動方程式、2 次以上が含まれているときは非線形波動方程式となります。$J \neq 0$ のときは重ね合わせの原理は適用されません。

2 次元と 3 次元での波の関数は、それぞれの座標とその波数によって

$$f(k_xx + k_yy - \omega t)\ ,\ f(k_xx + k_yy + k_zz - \omega t)$$

と与えられます。これらで同様にしていけば、2 次元と 3 次元での波動方程式

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,t) = \big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big)f(x,y,t)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t) = \big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\big)f(x,y,z,t)$$

3 次元での微分演算子はラプラシアン $\nabla^2 = \triangle = \nabla \cdot \nabla$ を使って

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f$$

と書かれます。

平面波 (plane wave) の話もしておきます。平面波は 3 次元の波に使われる単語ですが、1 次元平面波、2 次元平面波のようにも使われます。正弦波で平面波の例を示していきます。1 次元の正弦波は

$$A \sin(kx - \omega t)$$

最初にこれが x の正方向に進んでいるとした話と同じように、位相を定数 C とします。時間 t は固定されているとし、位相が C となる波の点 x は

$$kx - \omega t = C$$
$$x = \frac{1}{k}C + \frac{\omega}{k}t$$

時間が微小な Δt 経過したとき、同じ定数 C になる x' は

$$kx' - \omega t - \omega \Delta t = C$$
$$x' = \frac{1}{k}C + \frac{\omega}{k}t + \frac{\omega}{k}\Delta t$$

微小な時間経過なので差 $\Delta x = x' - x$ も微小とすれば、点 x の速度は

$$\Delta x = \frac{\omega}{k}\Delta t$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$
$$\frac{dx}{dt} = v \quad (\omega = kv)$$

このように、$\sin(k(x - vt))$ での位相速度 v は位相が定数となる点の速度と言えます。このため、位相速度と呼ばれます。

1 次元では点のために状況がはっきりしないので、2 次元にします。2 次元では位置の成分 y が増えて

$$f(x, y, t) = A \sin(k_x x + k_y y - \omega t)$$

波動方程式に入れると、速度 v は

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k_x^2 + k_y^2$$
$$v^2 = \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\omega^2}{|\boldsymbol{k}|^2} \quad (\boldsymbol{k} = (k_x, k_y))$$

1 次元の場合と比較すれば分かるように、2 次元での波数は $|\boldsymbol{k}|$ です。$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルと呼ばれます。波数ベクトルと位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y)$ によって

$$f(x,y,t)=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ の角度を θ とすれば

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t\pm 2\pi=|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|\cos\theta-\omega t\pm 2\pi=|\boldsymbol{k}|(|\boldsymbol{r}|\cos\theta\pm\frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|})-\omega t$$

となるだけなので、波長との関係は変更されません。
　位相を定数 C とし、t は適当な値に固定して

$$\begin{aligned}k_x x+k_y y-\omega t&=C\\ y&=-\frac{k_x}{k_y}x+\frac{1}{k_y}(C+\omega t)\end{aligned}\tag{2}$$

これは xy 平面での直線です。このように、2 次元では、位相が適当な定数になる波の位置を集めたときに作られるのは直線です。この直線は傾き $-k_x/k_y$ なので、直線の方向をベクトルで表せば $(k_y,-k_x)$ となり、波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)$ と直交します。
　1 次元や 2 次元のときにはあまり使われませんが、位相が一定の位置によって作られる集まりを波面 (wave front) と言います。今の場合では、1 次元では点、2 次元では直線となります。3 次元で平面になります。位相が一定なので等位相面とも呼ばれます。
　波面 (直線 (2)) が時間経過でどの方向に動くのか求めます。時間 $t+t_0$ での直線自体は

$$y=-\frac{k_x}{k_y}x+\frac{1}{k_y}(C+\omega t+\omega t_0)$$

となるので、y 軸方向に平行移動するだけです。t での位相

$$|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|\cos\theta-\omega t=C$$

に対して、$\boldsymbol{r}$ を $t=0,\theta=0$ での波の点の位置とすれば、その距離は $|\boldsymbol{r}|=C/|\boldsymbol{k}|$ です。その点の時間 t での位置を $\boldsymbol{r}'$ として

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}'|\cos\theta'-vt&=\frac{C}{k}\qquad(k=|\boldsymbol{k}|)\\ |\boldsymbol{r}'|\cos\theta'&=\frac{C}{k}+vt\end{aligned}$$

時間経過で直線は平行移動するだけなので、$|\boldsymbol{r}'|\cos\theta'$ は原点から t での直線への直線距離です。一方で、波の点は vt しか動かないので $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|=vt$ です。そうすると、$|\boldsymbol{r}|=C/k$ から、$|\boldsymbol{r}'|=C/k+vt$ でなければいけないです。このため、$\theta'=0$ となり、直線上のこの点は $\boldsymbol{k}$ の方向に動きます。一応確かめておきます。$\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}$ の角度 α は $\alpha=\theta'$($\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{k}$ の方向) なので

$$|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}|^2=(vt)^2$$

$$r'^2+r^2-2r'r\cos\alpha=(vt)^2 \qquad (r=|\boldsymbol{r}|\ ,\ r'=|\boldsymbol{r'}|)\frac{1}{\cos^2\alpha}(\frac{C}{k}+vt)^2+\frac{C^2}{k^2}-2\frac{1}{\cos\alpha}(\frac{C}{k}+vt)\frac{C}{k}\cos\alpha= \quad (vt)^2$$

$$\begin{aligned}(\frac{C}{k}+vt)^2&=((vt)^2-\frac{C^2}{k^2}+2(\frac{C}{k}+vt)\frac{C}{k})\cos^2\alpha\\&=((vt)^2+\frac{C^2}{k^2}+2vt\frac{C}{k})\cos^2\alpha\\&=(\frac{C^2}{k^2}+vt)^2\cos^2\alpha\end{aligned}$$

よって、$\cos^2\alpha=1$ から $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r'}$ は平行で、波面は $\boldsymbol{k}$ の方向に v で進んでいます。
　別の方向からも進行方向を求めてみます。(2) を時間で微分して

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k_x}{k_y}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{k_y}\omega$$

波の点は v で動くので

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=\frac{\omega^2}{k^2} \qquad (k=|\boldsymbol{k}|)$$

これらから

$$\begin{aligned}0&=(\frac{dx}{dt})^2+(-\frac{k_x}{k_y}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{k_y}\omega)^2-\frac{\omega^2}{k^2}\\&=u_x^2+(\frac{k_x}{k_y})^2u_x^2-2\frac{k_x}{k_y}\frac{\omega}{k_y}u_x+(\frac{\omega}{k_y})^2-(\frac{\omega}{k})^2 \qquad (u_x=\frac{dx}{dt})\\&=\frac{k^2}{k_y^2}u_x^2-2\frac{k_x}{k_y^2}\omega u_x+(\frac{\omega}{k_y})^2-(\frac{\omega}{k})^2\\&=k^2u_x^2-2k_x\omega u_x+\omega^2-\frac{k_y^2}{k^2}\omega^2\\&=k^4u_x^2-2k_xk^2\omega u_x+k_x^2\omega^2\\\frac{dx}{dt}&=\frac{k_x\omega}{k^2}\end{aligned}$$

となり

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k_x}{k_y}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{k_y}\omega=-\frac{k_x}{k_y}\frac{k_x\omega}{k^2}+\frac{1}{k_y}\omega=\frac{k_y\omega}{k^2}$$

そうすると、時間の微小変化 Δt に対して

$$\Delta x = \frac{k_x \omega}{k^2}\Delta t \ , \ \Delta y = \frac{k_y \omega}{k^2}\Delta t \ \Rightarrow \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k_y}{k_x}$$

これは波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と同じ方向なので、速度は波面に直交する方向を向いています。
　微小な時間 Δt 経過したあとの直線

$$k_x x' + k_y y' - \omega t - \omega \Delta t = C$$
$$y' = -\frac{k_x}{k_y}x' + \frac{1}{k_y}(C + \omega t + \omega \Delta t)$$

と比較してみます。x, x' と y, y' の差をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ として

$$k_y \Delta y = -k_x \Delta x + \omega \Delta t$$
$$k_x \Delta x + k_y \Delta y = \omega \Delta t$$

$\Delta x, \Delta y$ の位置関係が $\tan\phi = k_y/k_x$ と同じとすれば

$$k_x \Delta x + k_y \Delta y = k_x \Delta x (1 + \frac{k_y}{k_x}\frac{\Delta y}{\Delta x}) = k_x \Delta x (1 + \tan^2\phi) = k_x \Delta x \frac{1}{\cos^2\phi} = \frac{k^2}{k_x}\Delta x$$

となり

$$\frac{k^2}{k_x}\Delta x = \omega \Delta t$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_x}{k^2}\omega$$

同様に

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_y}{k^2}\omega$$

として、同じ結果になります。
　3 次元でも話は同じです。3 次元では

$$A\sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) = A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t) \quad (\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z) \ , \ \boldsymbol{r} = (x, y, z))$$

これも波動方程式に入れれば分かるように

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$
$$v^2 = \frac{\omega^2}{|\boldsymbol{k}|^2}$$

となっています。

今の波面が平面なのを簡単に示します。$t=0$ とし、$\boldsymbol{k}$ は z 軸方向とします。位相を定数 C とし、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度を θ として

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|\cos\theta = C$$

$|\boldsymbol{r}|\cos\theta$ は z 軸上の位置 d になるので、$\boldsymbol{r}=(x,y,d)$ の平面が作られます。この平面が波面です。波面が平面であるとき平面波 (plane wave) と呼ばれます。今の波面が z 軸方向の波数ベクトルと直交するように、波面は波数ベクトルと直交します。これは平面波の一般的な性質です（z 軸方向を任意の方向に取ればいいだけ)。また、3 次元の平面を 2 次元に落とせば、波面が波数ベクトルの方向に動くのが分かります。

ついでの話として、波動方程式は直交座標 (x,y,z) によって記述されていますが、これを違う座標系に書き換えます。波動方程式を別の座標系で書くことは多くの分野で出会います。ただし、実際に解くとなると非常に面倒なので、ここでは単に方程式の形を与えるだけにします。なので、計算練習みたいなものですが、必要な情報が結構あるので、何をしているのか分からなければ触れなくていいです。

必要なのはデカルト座標 (x,y,z) から変換された別の座標系でのラプラシアンです。先に一般化した形を与えてから、具体的な座標系にします。ラプラシアンの形の導出は数学の「極座標」で行っているのでそっちを見てください。ここでは結果だけ使います。

デカルト座標 (x,y,z) から別の座標 (u,v,w) への変換をします。それぞれの座標系での基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w$ とします。これらによって 2 点間の差 $d\boldsymbol{r}$ とその距離 (線素)$(ds)^2$ を

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz = \boldsymbol{e}_u du + \boldsymbol{e}_v dv + \boldsymbol{e}_w dw$$

$$(ds)^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{U^2}(du)^2 + \frac{1}{V^2}(dv)^2 + \frac{1}{W^2}(dw)^2$$

と与えます。$d\boldsymbol{r}$ で等式になっているのは $d\boldsymbol{r}$ を異なる基底ベクトルの線形結合で書いているだけだからです。変換後の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w$ は

$$\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_w = 0$$

$$\boldsymbol{e}'_u\cdot\boldsymbol{e}'_u = 1\ ,\ \boldsymbol{e}'_v\cdot\boldsymbol{e}'_v = 1\ ,\ \boldsymbol{e}'_w\cdot\boldsymbol{e}'_w = 1$$

$$\boldsymbol{e}'_u = U\boldsymbol{e}_u\ ,\ \boldsymbol{e}'_v = V\boldsymbol{e}_v\ ,\ \boldsymbol{e}'_w = W\boldsymbol{e}_w$$

として、お互いに直交させています ($\boldsymbol{e}'_u,\boldsymbol{e}'_v,\boldsymbol{e}'_w$ は内積が 1 になるように規格化したもの)。このとき、ラプラシアンは

$$\nabla^2 f = UVW\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U}{VW}\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V}{UW}\frac{\partial f}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W}{UV}\frac{\partial f}{\partial w})\Big) \tag{3}$$

となり、U,V,W は

$$\frac{1}{U^2} = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2 \tag{4a}$$

$$\frac{1}{V^2} = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2 \tag{4b}$$

$$\frac{1}{W^2} = (\frac{\partial x}{\partial w})^2 + (\frac{\partial y}{\partial w})^2 + (\frac{\partial z}{\partial w})^2 \tag{4c}$$

によって求められます。U,V,W は正とします。後は具体的な座標系を与えて (3) を使えば、その座標系でのラプラシアンが求まります。

準備が出来たので具体的な座標系での波動方程式を出します。波動方程式は係数を無視すれば

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f$$

となっているので、左辺のラプラシアンに新しい座標系での形を入れればいいだけです。しかし、それだけだとラプラシアン部分だけを見て終わってしまうので、よく出てくる微分方程式に変形させます。そのために、f は時間依存部分を分離できて $g(t)f(x,y,z)$ と書けるとします。さらに

$$g(t) = g_0 e^{ipt}$$

となっているとします。g_0 は定数です。そうすると

$$\begin{aligned}
\nabla^2 g(t)f(x,y,z) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t)f(x,y,z) \\
g(t)\nabla^2 f(x,y,z) &= f(x,y,z)\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t) \\
g_0 e^{ipt}\nabla^2 f(x,y,z) &= f(x,y,z)(-p^2 g_0 e^{ipt}) \\
\nabla^2 f(x,y,z) &= -p^2 f(x,y,z) \\
(\nabla^2 + p^2) f(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

となり、これはヘルムホルツ (Helmholtz) 方程式と呼ばれます。これを使います。

具体的な座標系として円柱座標と極座標を使います (どちらも基底ベクトルは直交している)。ちなみに、3 次元極座標は球座標とも呼ばれます。これらの場合の微分方程式は特殊関数を解に持ちますが、特殊関数にまでここで触れてもしょうがないので、名前を出すだけで済ませます。

- 円柱座標 (r, ϕ, z)

  円柱座標 (r, ϕ, z) への変換は

$$x = r\cos\phi \ ,\ y = r\sin\phi \ ,\ z = z$$

  これらを (4a)〜(4c) に入れます。$u = r, v = \phi, w = z$ なので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U^2} &= (\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\
\frac{1}{V^2} &= (\frac{\partial x}{\partial \phi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \phi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \phi})^2 = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2 \\
\frac{1}{W^2} &= (\frac{\partial x}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial z}{\partial z})^2 = 1
\end{aligned}$$

  U, V, W は正に取ることにすれば、これらから

$$U = 1 \ ,\ V = \frac{1}{r} \ ,\ W = 1$$

そうすると、円柱座標でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\big(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\frac{\partial}{\partial z})\big) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となっていることが分かります。
　これをヘルムホルツ方程式に入れると

$$\big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2\big)f(r,\phi,z) = 0$$

ここで、$f(r,\phi,z)$ が

$$f(r,\phi,z) = F_1(r)F_2(\phi)F_3(z)$$

と分離できるとして、さらに m を定数として

$$F_2(\phi) = e^{im\phi}$$

とすると

$$\begin{aligned}
0 &= (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p^2)F_1(r)F_2(\phi)F_3(z) \\
&= F_2(\phi)F_3(z)\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + F_2(\phi)F_3(z)\frac{1}{r}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} + F_1(r)F_3(z)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_2(\phi)}{\partial \phi^2} + F_1(r)F_2(\phi)\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2} \\
&\quad + p^2F_1(r)F_2(\phi)F_3(z) \\
&= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{F_2(\phi)}\frac{\partial^2 F_2(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{F_3(z)}\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2} + p^2 \\
&= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} + \frac{-m^2}{r^2}e^{-im\phi}e^{im\phi} + \frac{1}{F_3(z)}\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2} + p^2 \\
&= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} + \frac{-m^2}{r^2} + \frac{1}{F_3(z)}\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2} + p^2 \\
-\frac{1}{F_3(z)}\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2} &= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + p^2
\end{aligned}$$

このように左辺は z のみ、右辺は r のみになります (変数分離)。変数が異なってるものが等しくなるのは、定数のときです (左辺と右辺で依存しているものが違うので等号が成立するのは r,z に依存しない定数のとき)。なので、F_1, F_3 の方程式に分離することになり、定数を α^2 とすれば

$$\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}+(p^2-\alpha^2-\frac{m^2}{r^2})F_1(r)=0$$
$$\frac{\partial^2 F_3(z)}{\partial z^2}+\alpha^2 F_3(z)=0$$

$F_3(z)$ はすぐに

$$F_3(z)=e^{i\alpha z}$$

が解になっているのがわかります。$F_1(r)$ の解はベッセル (Bessel) 関数と呼ばれるもので与えられます。ベッセル関数はベッセル微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-c^2)y=0$$

の解のことで（c は定数)、円柱関数 (円筒関数、cylinder funciton) とも呼ばれます。微妙に形が違っていますが

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+(r^2(p^2-\alpha^2)-m^2)R(r)=0$$

とすれば、$p^2-\alpha^2$ は定数なので $r^2(p^2-\alpha^2)$ を新しく r'^2 と定義しなおせば同じ形になります。

- 極座標

  極座標 (r,θ,ϕ) への変換は

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=r\cos\theta$$

これから

$$\frac{1}{U^2}=(\frac{\partial x}{\partial r})^2+(\frac{\partial y}{\partial r})^2+(\frac{\partial z}{\partial r})^2=\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta=1$$
$$\frac{1}{V^2}=(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2+(\frac{\partial y}{\partial \theta})^2+(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=r^2\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\cos^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta=r^2$$
$$\frac{1}{W^2}=(\frac{\partial x}{\partial \phi})^2+(\frac{\partial y}{\partial \phi})^2+(\frac{\partial z}{\partial \phi})^2=r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta\cos^2\phi=r^2\sin^2\theta$$

なので、U,V,W は正に取って

$$U=1\ ,\ V=\frac{1}{r}\ ,\ W=\frac{1}{r\sin\theta}$$

これらによって極座標でのラプラシアンは

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\big(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi})\big) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

と求まります。

ヘルムホルツ方程式に適用させますが、今度も $f(r,\theta,\phi) = F_1(r)F_2(\theta)F_3(\phi)$ と分離します。そうすると

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(x,y,z) &= \big(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\big)F_1(r)F_2(\theta)F_3(\phi) \\
&= \frac{F_2(\theta)F_3(\phi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}) + \frac{F_1(r)F_3(\phi)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta}) + \frac{F_1(r)F_2(\theta)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_3(\phi)}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla^2 + p^2)f(x,y,z) \\
&= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}) + \frac{1}{F_2(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta}) + \frac{1}{F_3(\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_3(\phi)}{\partial\phi^2} + p^2r^2
\end{aligned}
$$

F_3 は $F_3 = e^{i\mu\phi}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}) + \frac{1}{F_2(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta}) + \frac{1}{F_3(\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_3(\phi)}{\partial\phi^2} + p^2r^2 \\
&= \frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}) + \frac{1}{F_2(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta}) + \frac{-\mu^2}{\sin^2\theta} + p^2r^2
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{F_1(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F_1(r)}{\partial r}) + p^2r^2 = -\frac{1}{F_2(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta}) + \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}
$$

となって、左辺は r、右辺は θ のみになります。定数を $\nu(\nu+1)$ として

$$
r^2\frac{\partial^2 F_1(r)}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial F_1(r)}{\partial r} + \big(p^2r^2 - \nu(\nu+1)\big)F_1(r) = 0
$$

$$
\sin^2\theta\frac{\partial^2 F_2(\theta)}{\partial\theta^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial F_2(\theta)}{\partial\theta} + \big(\nu(\nu+1)\sin^2\theta - \mu^2\big)F_2(\theta) = 0
$$

μ,ν が整数のとき、$F_1(r)$ は球ベッセル関数、$F_2(\theta)$ はルジャンドル陪関数となります。球ベッセル関数は球ベッセル微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\big(x^2-n(n+1)\big)y=0$$

の解で (n は整数)、ルジャンドル陪関数はルジャンドル陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2})y=0$$

の解です (l,m は整数で、$-l\leq m\leq l$ という条件がある)。ルジャンドル陪微分方程式は $x=\cos\theta$ として

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}=\frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\\
&\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta})=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{d}{d\theta}
\end{aligned}$$

を入れれば

$$\begin{aligned}
0=&\ \sin^2\theta(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{dy}{d\theta})+\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+\big(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\big)y\\
=&\ \frac{d^2y}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+\big(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\big)y
\end{aligned}$$

となり、同じ形になります。ちなみに第一項と第二項は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta})=\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

から

$$(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta})+(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta})y=0$$

と書くこともできます。