

極座標での波動方程式

級数の解を仮定する微分方程式の解き方の例として、極座標にした波動方程式を扱います。

フロベニウスの方法も出てきますが、あまり気にしないで平気です。

級数の収束性の話は省いています。

ベッセル方程式、ルジャンドル方程式、ルジャンドル陪方程式が出てきますが、詳しい話はせずによく出てくる解だけを示しています。ベッセル微分方程式のように呼ぶことが多いですが、微分を省いて言っていきます。

3次元波動方程式は

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

∇^2 は極座標 (r, θ, ϕ) では

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

位置の依存性が $r = |\mathbf{x}|$ のみで、角度依存性がないなら簡単に解けます。この場合では、 r の項しかないので

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial t^2}$$

$g(r, t) = r f(r, t)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{g}{r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{g}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{2g}{r^3} \right) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r, t) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{g}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{2g}{r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{2g}{r^3} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial t^2}$$

これは 1 次元波動方程式なので、 k を波数、 C を振幅として解を

$$g(r, t) = C \sin(kr - \omega t) \quad (\omega = kv)$$

とすれば

$$f(r, t) = \frac{C}{r} \sin(\omega t - kr)$$

これは時間経過で r が増加していく方向に進むので、球状に広がりながら振幅が r^{-1} で減少していく波です。これを球面波 (spherical wave) と言います。

角度依存がある場合を見ていきます。まず、 $f(x, t)$ を

$$f(x, t) = R(r)Y(\theta, \phi)e^{i\omega t}$$

と分解します。そうすると、波動方程式 (1) の右辺は

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -k^2 e^{i\omega t} \quad (k^2 = \frac{\omega^2}{v^2})$$

となるだけで、左辺は

$$\begin{aligned} \nabla^2 R(r)Y(\theta, \phi) &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) R(r)Y(\theta, \phi) \\ &= \frac{Y(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r}) + \frac{R(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta}) + \frac{R(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Y}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + k^2 RY \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial R}{\partial r}) + k^2 r^2 + \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \\ \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r}) + k^2 r^2 &= - \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned}$$

左辺は r のみに依存し、右辺は θ, ϕ に依存しています。異なる変数で等しくなるのは定数のときなので、定数を α として

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 - \alpha = 0$$

$$\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) + \alpha = 0$$

$R(r)$ は r のみに依存するので常微分にしています。 Y の式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \alpha Y(\theta, \phi) &= 0 \\ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \alpha Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta &= - \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

$Y(\theta, \phi) = A(\theta)B(\phi)$ と分解すると

$$\begin{aligned} B(\phi) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right) + \alpha A(\theta) B(\phi) \sin^2 \theta &= - A(\theta) \frac{\partial^2 B(\phi)}{\partial \phi^2} \\ \frac{1}{A(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dA(\theta)}{d\theta} \right) + \alpha \sin^2 \theta &= - \frac{1}{B(\phi)} \frac{d^2 B(\phi)}{d\phi^2} \end{aligned}$$

として、左辺は θ 、右辺は ϕ の式になります。なので、これも定数になる必要があり、定数を β^2 として

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dA(\theta)}{d\theta} \right) + \alpha \sin^2 \theta &= \beta^2 \\ \frac{d^2 B(\phi)}{d\phi^2} &= -\beta^2 B(\phi) \end{aligned}$$

よって、波動方程式は

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \alpha) R(r) = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dA(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right) A(\theta) = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{d^2 B(\phi)}{d\phi^2} = -\beta^2 B(\phi) \quad (2c)$$

として、3 個の常微分方程式に分解されます。

B はすぐに

$$B(\phi) = C e^{\pm i\beta\phi}$$

と分かります。 C は定数です。 ϕ は極座標の角度なので、 $\phi + 2\pi$ でもとの位置に戻ってくることから

$$B(\phi) = B(\phi + 2\pi)$$

このため

$$B(\phi + 2\pi) = Ce^{\pm i\beta(\phi+2\pi)} = Ce^{\pm i\beta\phi} e^{\pm i2\pi\beta} = Ce^{\pm i\beta\phi} = B(\phi)$$

となる必要があるので、 $e^{2\pi n} = 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) から $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ です。よって、 $\pm i\beta\phi$ の $\pm$ は意味がないので省いて

$$B(\phi) = Ce^{i\beta\phi} \quad (\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となります。

A と R を求めます。

- $A(\theta)$

$z = \cos \theta$ とすると

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d}{dz} = -\sin \theta \frac{d}{dz} = -\sqrt{1-z^2} \frac{d}{dz}$$

から、(2b) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dA(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right) A(\theta) &= -\frac{d}{dz} \left(-(1-z^2) \frac{dA(z)}{dz} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{1-z^2} \right) A(z) \\ &= (1-z^2) \frac{d^2 A(z)}{dz^2} - 2z \frac{dA(z)}{dz} + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{1-z^2} \right) A(z) \end{aligned}$$

となり

$$(1-z^2) \frac{d^2 A(z)}{dz^2} - 2z \frac{dA(z)}{dz} + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{1-z^2} \right) A(z) = 0$$

これはルジャンドル陪方程式 (associated Legendre equation, generalized Legendre equation) と呼ばれます。この変形は最後に回して、結果に行きます。 A を

$$A = (1-z^2)^{s/2} p$$

とすることで

$$(1-z^2) \frac{d^2 p}{dz^2} - 2(|\beta|+1)z \frac{dp}{dz} + (\alpha - |\beta|(|\beta|+1))p = 0$$

と変形できます。 $|\beta|$ は m としていきます。

$-1 \leq z \leq +1$ の範囲で解を持つことを見ます。まず、解を級数によって

$$p(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

と仮定します。微分は

$$\frac{d}{dz} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \frac{d}{dz} (a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 \cdots) = a_1 + 2a_2 z \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j z^{j-1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = 2 + 6a_3 z + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j z^{j-2}$$

となっているので

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - z^2) \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j z^{j-2} - 2z \sum_{j=0}^{\infty} j(m+1) a_j z^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha - m(m+1)) a_j z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j z^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} 2j(m+1) a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha - m(m+1)) a_j z^j \end{aligned}$$

第1項は $j = 0, 1$ で0なので j を $j+2$ に置き換えて

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} z^j - \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} 2j(m+1) a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha - m(m+1)) a_j z^j$$

$z^j \neq 0$ の解が欲しいので

$$\begin{aligned} (j+2)(j+1) a_{j+2} &= (j(j-1) + 2(m+1)j - (\alpha - m(m+1))) a_j \\ a_{j+2} &= \frac{j(j-1) + 2(m+1)j - \alpha + m(m+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \\ &= \frac{j^2 + j + 2mj - \alpha + m^2 + m}{(j+2)(j+1)} a_j \\ &= \frac{(j+m)(j+m+1) - \alpha}{(j+2)(j+1)} a_j \end{aligned}$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ から、制限がなければ一般的に $a_{j+2} > a_j$ です。そして、 $-1 \leq z \leq +1$ ($z = \cos \theta$) なので、 $z = \pm 1$ のとき級数は発散します。この問題に対処するために、ある j_0 以上で分子は0になるとします (級数の範囲が $j = 0$ から j_0)。そのためには

$$(j_0 + m)(j_0 + m + 1) - \alpha = 0$$

となればいいので、 α は

$$\alpha = l(l+1) \quad (l = j_0 + m, \ l \geq m)$$

となります。

というわけで、 $p(z)$ を l, m によって指定したものが解です。それを $p_l^m(z)$ (m は m 乗でなく区別の添え字)、 A を $A_l^m(z)$ と表記することにして

$$A_l^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} p_l^m(z) \quad (l \geq m, \ m = 0, 1, 2, \dots)$$

$A_l^m(z)$ はルジャンドル陪関数と呼ばれます。 A_l^m はルジャンドル方程式の解 $y(z)$ から

$$A_l^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m y}{dz^m}$$

と求まるので、今のように級数解から求める必要はあまりないです。話の流れから A_l^m としていますが、大抵の場合でルジャンドル陪関数は P_l^m と表記されます。また、この解による $Y(\theta, \phi) = A(\theta)B(\phi)$ は球面調和関数 (spherical harmonics) と呼ばれます。

- $R(r)$

(2a) を変形すると

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \alpha) R = 0 \tag{3}$$

これは球ベッセル (spherical Bessel) 方程式です。これをベッセル方程式に変形します。 $R(r)$ を

$$R(r) = \frac{F(r)}{\sqrt{kr}}$$

と置き換えれば、微分は

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{2} \frac{k}{(kr)^{3/2}} F$$

2 回では

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{1}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{2} \frac{k}{(kr)^{3/2}} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{2} \frac{k}{(kr)^{3/2}} \frac{dF}{dr} + \frac{3}{4} \frac{k^2}{(kr)^{5/2}} F \\
&= \frac{1}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{k}{(kr)^{3/2}} \frac{dF}{dr} + \frac{3}{4} \frac{k^2}{(kr)^{5/2}} F
\end{aligned}$$

なので、(3) は

$$\begin{aligned}
0 &= r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \alpha) R \\
&= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{kr^2}{(kr)^{3/2}} \frac{dF}{dr} + \frac{3}{4} \frac{k^2 r^2}{(kr)^{5/2}} F + \frac{2r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} - \frac{kr}{(kr)^{3/2}} F + (k^2 r^2 - \alpha) \frac{F}{\sqrt{kr}} \\
&= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{kr}} F + (k^2 r^2 - \alpha) \frac{F}{\sqrt{kr}} \\
&= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - \alpha - \frac{1}{4}) \frac{F}{\sqrt{kr}}
\end{aligned}$$

$A(\theta)$ で求めた $\alpha = l(l+1)$ を使うと

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - l(l+1) - \frac{1}{4}) \frac{F}{\sqrt{kr}} \\
&= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - l^2 - l - \frac{1}{4}) \frac{F}{\sqrt{kr}} \\
&= \frac{r^2}{\sqrt{kr}} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{kr}} \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - (l + \frac{1}{2})^2) \frac{F}{\sqrt{kr}}
\end{aligned}$$

$\nu = l + 1/2$ として

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) F = 0$$

さらに、 $\lambda = kr$ として

$$\lambda^2 \frac{d^2 F}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dF}{d\lambda} + (\lambda^2 - \nu^2) F = 0 \quad (4)$$

これをベッセル方程式と呼びます。ここでは ν が半整数になっていることに注意してください。

級数解を求めます。ベッセル方程式を λ^2 で割ると λ^{-1} が出てくるために、 $\lambda = 0$ でのべき級数の形でなく

$$F(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{s+j}$$

と仮定します。これはフロベニウス級数と呼ばれ、今のような特異点があるときに使われます (数学の「フロベニウスの方法」参照)。この微分は

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}(a_0\lambda^s + a_1\lambda^{s+1} + \cdots) = a_0s\lambda^{s-1} + a_1(s+1)\lambda^s + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(s+j)\lambda^{s+j} \\ \frac{d^2F}{d\lambda^2} &= a_0s(s-1)\lambda^{s-2} + a_1(s+1)s\lambda^{s-1} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(s+j)(s+j-1)\lambda^{s+j-2}\end{aligned}$$

(4) に入れば

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_j(s+j)(s+j-1)\lambda^{s+j} + a_j(s+j)\lambda^{s+j} + a_j\lambda^{s+j+2} - a_j\nu^2\lambda^{s+j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j((s+j)(s+j-1) + s+j-\nu^2)\lambda^{s+j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j\lambda^{s+j+2}\end{aligned}\tag{5}$$

第1項から第2項より低いオーダーが出てくるので、 $j=0$ を取り出すと

$$a_0(s(s-1) + s - \nu^2)\lambda^s = 0$$

λ の各オーダーで0になる必要があるので

$$a_0(s(s-1) + s - \nu^2) = 0$$

$a_0 \neq 0$ として、 $s^2 = \nu^2$ と求められます。また、 $j=1$ では

$$a_1((s+1)s + s + 1 - \nu^2)\lambda^{s+1} = 0$$

これから

$$a_1((s+1)^2 - \nu^2) = 0$$

$a_1 \neq 0$ なら、 $(s+1)^2 = \nu^2$ となり、 $s^2 = \nu^2$ と矛盾します。なので、 $a_0 \neq 0$ とすると、 $a_1 = 0$ になります。

(5) の λ の各オーダーで0になるためには、第1項と第2項から出てくる λ^{s+j} の係数 a_{j-2} による和は消える必要があります。 λ のオーダーを合わせるために第1項の j を $j+2$ にして

$$\begin{aligned}a_{j+2}((s+j+2)(s+j+1) + (s+j+2) - \nu^2) + a_j &= 0 \\ a_{j+2} &= -\frac{a_j}{(s+j+2)(s+j+1) + s+j+2 - \nu^2}\end{aligned}$$

これは係数 a_j の漸化式です。 $a_0 \neq 0$ では $a_1 = 0$ なので $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ となり、偶数のときだけが消えずに残ります。

$s = \nu = l + 1/2$ (正の半整数) とします。そうすると

$$a_{j+2} = -\frac{a_j}{(\nu + j + 2)(\nu + j + 1) + \nu + j + 2 - \nu^2} = -\frac{a_j}{(\nu + j + 2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_j}{(j + 2)(j + 2\nu + 2)}$$

これは

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2\nu + 2)} = -\frac{1}{2} \frac{a_0}{(2\nu + 2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2\nu + 4)} = \frac{1}{4 \times 2} \frac{a_0}{(2\nu + 4)(2\nu + 2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2\nu + 6)} = -\frac{1}{6 \times 4 \times 2} \frac{a_0}{(2\nu + 6)(2\nu + 4)(2\nu + 2)}$$

と続いていき、 $|a_{j+2}| < |a_j|$ なので級数は発散しません。これらから法則性が分かり、 a_{2j} は

$$\begin{aligned} a_{2j} &= (-1)^j \frac{1}{2j(2j-2) \cdots \times 4 \times 2} \frac{a_0}{(2\nu+2j)(2\nu+2j-2) \cdots (2\nu+4)(2\nu+2)} \\ &= (-1)^j \frac{1}{2^j} \frac{1}{j(j-1) \cdots \times 2 \times 1} \frac{1}{2^j} \frac{a_0}{(\nu+j)(\nu+j-1) \cdots (\nu+2)(\nu+1)} \\ &= (-1)^j \frac{1}{2^{2j}} \frac{1}{j!} \frac{a_0}{(\nu+j)(\nu+j-1) \cdots (\nu+2)(\nu+1)} \end{aligned}$$

ν が半整数のために階乗にできないので、ガンマ関数を使います (数学の「ガンマ関数」参照)。ガンマ関数の性質 $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ から

$$\Gamma(\nu+j+1) = (\nu+j)\Gamma(\nu+j) = (\nu+j)(\nu+j-1)\Gamma(\nu+j-1)$$

これを $\nu+1$ になるまで続けることで

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+j+1) &= (\nu+j)(\nu+j-1) \cdots (\nu+1)\Gamma(\nu+1) \\ (\nu+j)(\nu+j-1) \cdots (\nu+1) &= \frac{\Gamma(\nu+j+1)}{\Gamma(\nu+1)} \end{aligned}$$

となるので

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{\Gamma(\nu+j+1)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{2j}} a_0$$

よって

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} \lambda^{\nu+2j} = \Gamma(\nu+1) a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{\Gamma(\nu+j+1)} \frac{1}{2^{2j}} \lambda^{\nu+2j} \\
&= 2^\nu \Gamma(\nu+1) a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2j} \\
&= 2^\nu \Gamma(\nu+1) a_0 J_\nu(\lambda)
\end{aligned} \tag{6}$$

$J_\nu(\lambda)$ はベッセル関数と呼ばれます。というわけで、 R は

$$R(r) = \frac{F(r)}{\sqrt{kr}} = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1) a_0}{\sqrt{kr}} J_\nu(\lambda) \quad (\lambda = kr, \nu = l + \frac{1}{2})$$

となります。

ちなみに、 ν は正としていますが、負でもベッセル方程式の解になります。これは ν を $-\nu$ に置き換えればいいだけです。そして、それぞれのベッセル関数の $j=0$ の項を見ると

$$J_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\nu, \quad J_{-\nu} \sim \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\nu}$$

ν が半整数ならどちらのガンマ関数も有限の値です。 λ^ν と $\lambda^{-\nu}$ は定数倍の関係ではないので、 J_ν と $J_{-\nu}$ は線形独立な解です。よって、一般解は、 C_1, C_2 を定数として

$$F(\lambda) = C_1 J_\nu(\lambda) + C_2 J_{-\nu}(\lambda)$$

となります。また、導出から分かるように、 ν が負でない整数でも (6) になりますが (ガンマ関数は階乗で書ける)、 $J_\nu, J_{-\nu}$ は線形独立な解にはならないです。 ν を負でない整数としたとき、 $\Gamma(\nu+1) = \nu!$ なので

$$\begin{aligned}
J_{-\nu}(\lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{\Gamma(-\nu+j+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\nu+2j} \\
&= \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(j-\nu)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\nu+2j} \\
&= \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'+\nu}}{(j'+\nu)!} \frac{1}{j'!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\nu+2j'+2\nu} \quad (j' = j - \nu) \\
&= (-1)^\nu \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{(j'+\nu)!} \frac{1}{j'!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2j'} \\
&= (-1)^\nu J_\nu(\lambda)
\end{aligned}$$

となるからです。2 行目でガンマ関数 $\Gamma(a)$ は a が負の整数のとき無限大になることを使っています。

最後にルジャンドル方程式とルジャンドル陪方程式の解が関係していることを求めます。微分を繰り返して変形していくだけです。

ここでのルジャンドル方程式は、 l を正の整数として

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x\frac{dy(x)}{dx} + l(l+1)y(x) = 0$$

ルジャンドル陪方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 2x\frac{du(x)}{dx} + (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})u(x) = 0 \quad (7)$$

m は整数です。ルジャンドル方程式からルジャンドル陪方程式が作れることを見ます。微分だけで煩わしいので、 n 回微分を $y^{(n)}$ のように表記します。

ルジャンドル陪方程式での u を

$$u(x) = (1-x^2)^{s/2}P(x)$$

とすると、 $u^{(1)}$ は

$$u^{(1)} = (1-x^2)^{s/2}P^{(1)} - sx(1-x^2)^{s/2-1}P$$

$u^{(2)}$ は

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= (1-x^2)^{s/2}P^{(2)} - sx(1-x^2)^{s/2-1}P^{(1)} - sx(1-x^2)^{s/2-1}P^{(1)} \\ &\quad - s(1-x^2)^{s/2-1}P + 2s(\frac{s}{2} - 1)x^2(1-x^2)^{s/2-2}P \\ &= (1-x^2)^{s/2}P^{(2)} - 2sx(1-x^2)^{s/2-1}P^{(1)} - s(1-x^2)^{s/2-1}P + (s^2 - 2s)x^2(1-x^2)^{s/2-2}P \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} (1-x^2)u^{(2)} &= (1-x^2)^{s/2+1}P^{(2)} - 2sx(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} - s(1-x^2)^{s/2}P + (s^2 - 2s)x^2(1-x^2)^{s/2-1}P \\ 2xu^{(1)} &= 2x(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} - 2sx^2(1-x^2)^{s/2-1}P \\ (\alpha - \frac{m^2}{1-x^2})u &= (\alpha - \frac{m^2}{1-x^2})(1-x^2)^{s/2}P = \alpha(1-x^2)^{s/2}P - m^2(1-x^2)^{s/2-1}P \end{aligned}$$

$\alpha = l(l-1)$ としています。これからルジャンドル陪方程式は

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)^{s/2+1}P^{(2)} - 2sx(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} - s(1-x^2)^{s/2}P + (s^2-2s)x^2(1-x^2)^{s/2-1}P \\
& \quad - 2x(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} + 2sx^2(1-x^2)^{s/2-1}P + \alpha(1-x^2)^{s/2}P(x) - m^2(1-x^2)^{s/2-1}P \\
& = (1-x^2)^{s/2+1}P^{(2)} - 2(s+1)x(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} \\
& \quad + (-s(1-x^2)^{s/2} + s^2x^2(1-x^2)^{s/2-1} + \alpha(1-x^2)^{s/2} - m^2(1-x^2)^{s/2-1})P \\
& = (1-x^2)^{s/2+1}P^{(2)} - 2(s+1)x(1-x^2)^{s/2}P^{(1)} \\
& \quad + ((\alpha-s)(1-x^2)^{s/2} + (s^2x^2-m^2)(1-x^2)^{s/2-1})P
\end{aligned}$$

$s = |m|$ としてみると

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)^{|m|/2+1}P^{(2)} - 2(|m|+1)x(1-x^2)^{|m|/2}P^{(1)} \\
& \quad + ((\alpha-|m|)(1-x^2)^{|m|/2} - m^2(1-x^2)(1-x^2)^{|m|/2-1})P \\
& = (1-x^2)^{|m|/2+1}\frac{d^2P}{dx^2} - 2(|m|+1)x(1-x^2)^{|m|/2}\frac{dP}{dx} + (\alpha-|m|(|m|+1))(1-x^2)^{|m|/2}P
\end{aligned}$$

$s = |m|$ にしているのは、 $(1-x^2)^{s/2}P(x)$ なので $s = -|m|$ では $x^2 = 1$ で解が発散するからです (実際には、(7) は m^2 しか含まないので $-|m|$ も解になる)。よって、ルジャンドル陪方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2(|m|+1)x\frac{dP}{dx} + (l(l+1)-|m|(|m|+1))P = 0$$

と変形できます。

今度はルジャンドル方程式を m 回微分して

$$\frac{d^m}{dx^m}((1-x^2)y^{(2)}) = \frac{d^m}{dx^m}y^{(2)} - \frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)}) = y^{(m+2)} - \frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)})$$

ライプニッツ則 (一般化されたライプニッツ則) を使えばすぐに求まりますが、地道に求めてみます。第 2 項は

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)}) &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(2xy^{(2)} + x^2y^{(3)}) \\
&= \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(2y^{(2)} + 2xy^{(3)} + 2xy^{(3)} + x^2y^{(4)}) \\
&= \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(2y^{(2)} + 4xy^{(3)} + x^2y^{(4)}) \\
&= \frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}(2y^{(3)} + 4y^{(3)} + 4xy^{(4)} + 2xy^{(4)} + x^2y^{(5)}) \\
&= \frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}(6y^{(3)} + 6xy^{(4)} + x^2y^{(5)}) \\
&= \frac{d^{m-4}}{dx^{m-4}}(6y^{(4)} + 6y^{(4)} + 6xy^{(5)} + 2xy^{(5)} + x^2y^{(6)}) \\
&= \frac{d^{m-4}}{dx^{m-4}}(12y^{(4)} + 8xy^{(5)} + x^2y^{(6)})
\end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2y^{(2)}) &= 2xy^{(2)} + x^2y^{(3)} = 2xy^{(1+1)} + x^2y^{(1+2)} \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^2y^{(2)}) &= 2y^{(2)} + 4xy^{(3)} + x^2y^{(4)} = 2(2-1)y^{(2)} + 2 \times 2xy^{(2+1)} + x^2y^{(2+2)} \\ \frac{d^3}{dx^3}(x^2y^{(2)}) &= 6y^{(3)} + 6xy^{(4)} + x^2y^{(5)} = 3(3-1)y^{(3)} + 2 \times 3xy^{(3+1)} + x^2y^{(3+2)} \\ \frac{d^4}{dx^4}(x^2y^{(2)}) &= 12y^{(4)} + 8xy^{(5)} + x^2y^{(6)} = 4(4-1)y^{(4)} + 2 \times 4xy^{(4+1)} + x^2y^{(4+2)}\end{aligned}$$

となっているので

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^2y^{(2)}) = m(m-1)y^{(m)} + 2mxy^{(m+1)} + x^2y^{(m+2)} \quad (8)$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}((1-x^2)y^{(2)}) &= y^{(m+2)} - (m(m-1)y^{(m)} + 2mxy^{(m+1)} + x^2y^{(m+2)}) \\ &= (1-x^2)y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)}\end{aligned} \quad (9)$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(xy^{(1)}) &= y^{(1)} + xy^{(2)} = y^{(1)} + xy^{(1+2)} \\ \frac{d^2}{dx^2}(xy^{(1)}) &= y^{(2)} + y^{(2)} + xy^{(3)} = 2y^{(2)} + xy^{(2+1)} \\ \frac{d^3}{dx^3}(xy^{(1)}) &= 2y^{(3)} + y^{(3)} + xy^{(4)} = 3y^{(3)} + xy^{(3+1)}\end{aligned}$$

から

$$\frac{d^m}{dx^m}(xy^{(1)}) = my^{(m)} + xy^{(m+1)} \quad (10)$$

ちなみに、(8) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2y^{(2)}) &= 2xy^{(2)} + x^2y^{(3)} = \sum_{k=0}^1 \left(\frac{d^k}{dx^k} x^2 \right) \left(\frac{d^{1-k}}{dx^{1-k}} y^{(2)} \right) \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^2y^{(2)}) &= 2y^{(2)} + 4xy^{(3)} + x^2y^{(4)} = \sum_{k=0}^2 \frac{2!}{k!(2-k)!} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^2 \right) \left(\frac{d^{2-k}}{dx^{2-k}} y^{(2)} \right) \\ \frac{d^3}{dx^3}(x^2y^{(2)}) &= (6y^{(3)} + 6xy^{(4)} + x^2y^{(5)}) = \sum_{k=0}^3 \frac{3!}{k!(3-k)!} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^2 \right) \left(\frac{d^{3-k}}{dx^{3-k}} y^{(2)} \right) \\ \frac{d^4}{dx^4}(x^2y^{(2)}) &= (12y^{(4)} + 8xy^{(5)} + x^2y^{(6)}) = \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{k!(4-k)!} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^2 \right) \left(\frac{d^{4-k}}{dx^{4-k}} y^{(2)} \right)\end{aligned}$$

から

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^2 y^{(2)}) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^2 \right) \left(\frac{d^{3-k}}{dx^{3-k}} y^{(2)} \right)$$

この形を一般化したのがライプニッツ則で

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{d^{n-k} f}{dx^{n-k}} \frac{d^k g}{dx^k} \quad ({}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!})$$

となっています。

(9) と (10) から、ルジャンドル方程式に d^m/dx^m を作用させた式は

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)} - 2(my^{(m)} + xy^{(m+1)}) + l(l+1)y^{(m)} = 0$$

$y^{(m)} = P$ とすれば

$$\begin{aligned} (1-x^2)P^{(2)} - 2m x P^{(1)} - m(m-1)P - 2(mP + xP^{(1)}) + l(l+1)P \\ = (1-x^2)P^{(2)} - 2x(m+1)P^{(1)} + (l(l+1) - m(m+1))P \end{aligned}$$

となり、ルジャンドル陪微分方程式になります。というわけで、ルジャンドル陪微分方程式の解はルジャンドル方程式の解 y から

$$u = (1-x^2)^{m/2} P = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m y}{dx^m}$$

として求まります。ただし、物理 (特に量子力学) では

$$u = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m y}{dx^m}$$

と定義されることが多いです。これは球面調和関数との対応のためです。

ルジャンドル方程式の級数解は素直に求まります。級数解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とすれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

もう 1 回微分すれば

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

これらをルジャンドル方程式に入れれば

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + l(l+1)y(x) \\ &= (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

和の範囲を揃えます。第 2 項は $n=0$ で 0 なので

$$2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

第 1 項は

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

これの第 2 項は $n=0, 1$ のとき 0 なので、 $n=0$ からにできます。第 1 項は 2 ずらせばいいので

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

これで全ての項が $n=0$ からの和になり

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + l(l+1) a_n) x^n = 0$$

右辺が 0 なので、 x の各オーダーで 0 になる必要があります。 $x=0$ では意味がないので、 $x \neq 0$ から

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + l(l+1) a_n = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = (n(n-1) + 2n - l(l+1)) a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

として、係数の漸化式が出てきます。

$n = 0$ から始めると

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{l(l+1)}{2}a_0 \\ a_4 &= \frac{6-l^2-l}{4 \times 3}a_2 = -\frac{(l+3)(l-2)}{4 \times 3} \frac{l(l+1)}{2}a_0 = \frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}a_0 \\ a_6 &= \frac{20-l^2-l}{6 \times 5}a_4 = -\frac{(l+5)(l-4)}{6 \times 5}a_4 = -\frac{(l+5)(l+3)(l+1)l(l-2)(l-4)}{6!}a_0 \end{aligned}$$

これから

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(l+2n-1)(l+2n-3) \cdots (l+3)(l+1)l(l-2) \cdots (l-2n+4)(l-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

$n = 1$ からでは

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2-l^2-l}{3 \times 2}a_1 = -\frac{(l+2)(l-1)}{3!}a_1 \\ a_5 &= \frac{12-l^2-l}{5 \times 4}a_3 = \frac{(l+4)(l-3)}{5 \times 4} \frac{(l+2)(l-1)}{3!}a_1 = \frac{(l+4)(l+2)(l-3)(l-1)}{5!}a_1 \\ a_7 &= \frac{30-l^2-l}{7 \times 6}a_5 = -\frac{(l+6)(l-5)}{7 \times 6}a_5 = -\frac{(l+6)(l+4)(l+2)(l-5)(l-3)(l-1)}{7!}a_1 \end{aligned}$$

これから

$$a_{2n+1} = \frac{(l+2n)(l+2n-2) \cdots (l+2)(l-2n+1)(l-2n-1) \cdots (l-1)}{(2n+1)!} a_1$$

2 つを合わせて

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(l+2n-1) \cdots (l+1)l(l-2) \cdots (l-2n+2)}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \right) \\ &\quad + a_1 \left(x - \frac{(l+2)(l-1)}{2!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{(l+2n) \cdots (l+2)(l-2n+1) \cdots (l-1)}{(2n+1)!} + \cdots \right) \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \end{aligned} \tag{11}$$

y_1 と y_2 の $x = 0$ でのロンスキアン W は

$$W(y_1, y_2) = y_1(0) \frac{dy_2}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=0} y_2(0) = 1 - 0 = 1$$

となり、0 ではないです。このことから、 y_1, y_2 は線形独立な解です。よって、 a_0, a_1 が任意定数なので、(11) は一般解です。