

Chiral and deconfinement phase transition from Dyson-Schwinger equations

Christian S. Fischer and Jens A. Mueller

arXiv:0908.0007 [hep-ph]

個人的に気になったから読んでやつのメモ的なものです。カイラル対称性の回復する温度と非閉じ込め相になる温度を求める話です。この論文で面倒なのは dual condensate の定義ぐらいです。数値計算もカレント質量を残しているために、くり込みの処理で若干面倒になっていますが、それは数値計算の技術的な話なので省きます。dual condensate についてはそれなりの説明をしますが、それ以外は相当雑に扱います。これは連続物の一つで、これの前に離散的 (トラス上) とした arXiv:0904.2700、密度を加えた arXiv:1104.1564 があります。

カイラル対称性の破れが回復したからといって、ハドロンの閉じ込めがなくなるのかというまだよく分かっていない話題に触れます。これは言い換えれば、カイラル対称性の回復する温度がクォーク・グルーオンプラズマ状態を作る臨界温度になっているのかということです。カイラル対称性の破れは閉じ込めというより、カレント質量から構成子質量を作ることやパイオンの生成なんかを担っているものです。それでも、カイラル対称性の破れによる構成子質量の生成はハドロンの閉じ込められていることを間接的に説明します (ハドロンのクォーク質量を説明するから)。しかし、閉じ込めがなくなったとき、カイラル対称性の破れが維持されていても致命的な状況になっているのかよく分かりません。その逆もです。これを解析している話はいくつもあって、ここではその一つの結果を説明します。

やることはカイラル相転移と閉じ込め相転移の臨界温度を Dyson-Schwinger(DS) 方程式によって求めるだけです (Schwinger-Dyson 方程式と並びを逆にしたりしますが、趣味の問題です)。最初に状況説明を簡単にしておきます。

- カイラル対称性 (場の量子論の「南部-Jona-Lasinio モデル」参照)

$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ の変換に対してラグランジアンが不変になっていることを要求します。これは質量項があると成立しません。対称性に対するオーダパラメータとしてはフェルミオン-反フェルミオンによる真空期待値 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ が使われます (カイラル凝縮)。

- ハドロンの閉じ込め (場の量子論の「格子ゲージ理論」参照)

ハドロンの閉じ込めを見るには格子場の理論でのポリヤコフープが便利です。ポリヤコフープはリンク変数 U_μ の時間方向 U_4 によって

$$L(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{N_t} U_4(\mathbf{x}, n)$$

ポリヤコフープは中心対称性 $Z(N_c)$ を壊すようになっています。ポリヤコフープがゼロのとき ($\langle L(\mathbf{x}) \rangle = 0$) に閉じ込められているとするので、閉じ込められているとき中心対称性は成立しています。閉じ込められていないとき ($\langle L(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$) に中心対称性は破れます。

ハドロンの閉じ込められているときは、カイラル対称性は破れているだろうというのが現状の結論なので、各オーダパラメータは、臨界温度以下で

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0, \quad \langle L(\mathbf{x}) \rangle = 0$$

となっています。なので、カイラル対称性は破れら、中心対称性は成立しています。

この状況から有限温度に持っていくと、対称性の回復からカイラル対称性は回復し、ポリヤコフープは有限の値を持つようになります。つまり、もしカイラル対称性の回復とポリヤコフープが値を持つ温度が違うなら

- カイラル対称性の破れた相から破れていない相への相転移 (カイラル相転移)
- 閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移 (非閉じ込め相転移)

という2つの相転移が存在することになります。ちなみに、クォーク・グルーオンプラズマ状態の1つのイメージの仕方は、クォークを閉じ込めてハドロンが複数あるというイメージが、1つの大きな塊の中にクォークとグルーオンが自由に動きまわるイメージに変化するということです。

この手の話で最も発展しており信頼性の高い格子シミュレーションではどうなっているのかというと

- Brookhaven/Bielefeld group (arXiv:0710.0354 [hep-lat])
同じ臨界温度：196(3)(MeV)
- Wuppertal (ブッパータル) group (arXiv:0903.4155 [hep-lat])
非閉じ込め相転移：170(7)(MeV)
カイラル相転移：146(5)(MeV)

このように研究者の違いで異なった結果を出しています(数字の後の括弧は誤差で、(3)なら ± 3)。格子場での話になりますが、どちらもフェルミオンを格子上にのせるために staggerd フェルミオンという方法を取っています。ただ、staggerd フェルミオンを修正する方法が異なっているらしく、それが異なった結果を導いているんじゃないかと思われています。もしくは格子間隔の違いによるものなのかです。そして、他の研究グループがフェルミオンに対して、staggerd フェルミオンでなくウィルソンフェルミオンという方法を取って計算したら、2つの臨界温度は一致するという結果を出しています(arXiv:0910.2392 [hep-lat])。というわけで、格子上にフェルミオンを乗せる方法によって結果がずれていて、その理由が明確に判明していない現状では格子シミュレーションからも正確な答えが出てきません。

というわけで、たとえ他の方法で調べたとしても正しいと言い張ることができないんですが、他の方法でやることで何かしらの情報が得られるかもしれないので DS 方程式で調べる、というのがこの論文です。なので、はっきり言ってしまえば、設定と結果だけ分かれば途中の手順なんかどうでもいいんですが、一応論文を追っていきます。

最初に閉じ込めのオーダパラメータをどうやって DS 方程式と絡めるのかを説明します。上で見たようにポリヤコフループは格子上で定義されているものなので、連続極限で作られている DS 方程式でどうやってポリヤコフループを作るのかということになります。そのために、arXiv:0710.0294v1 や arXiv:0801.4051v2 での dressed ポリヤコフループの説明をまずします。カイラル凝縮は、ゲージ場があるときのディラック方程式の演算子部分 D とすれば

$$\int d^4x \langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle = -\langle \text{tr}[(D+m)^{-1}] \rangle_G$$

と書けます(ユークリッド空間、ディラック方程式は $(D+m)\psi=0$)。tr は D の固有値に対して、 $\langle \rangle_G$ はフェルミオンの積分 $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ を行った後の経路積分、 m がクォーク質量です。ようは、 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ が \exp の外にいる経路積分で $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ を行った後の形です。右辺にマイナスがついているのは、伝播関数の定義が $\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle$ になっていることから分かると思います(同時刻交換関係からマイナスが出てくる)。

ここでのディラック演算子部分 D を格子上で表現して話を進めるんですが、簡単のためにただのラプラシアンだとします。ゲージ場があるときの格子上でのラプラシアンは、結果だけを使うことにして

$$\Delta(x,y) = (8+m^2)\delta_{x,y} - \sum_{\mu=1}^4 (U_{\mu}(x)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_{\mu}^{\dagger}(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu},y})$$

となっています(x,y は 4次元格子上の点)。 U_{μ} はリンク変数で、 $\hat{\mu}$ は μ 方向に格子1つ分移動することを表す記号です。なので、格子間隔 a と 4次元格子上での単位ベクトル e_{μ} を使えば $\hat{\mu} = ae_{\mu}$ となっています。これを

$$\Delta(x,y) = \frac{1}{\kappa}(1 - \kappa H(x,y)), \quad H = \sum_{\mu=1}^4 (U_{\mu}(x)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_{\mu}^{\dagger}(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu},y})$$

$$\kappa = \frac{1}{8+m^2}$$

と書き換えます。これを $\Delta(x,x)$ として逆にすると、単純な展開から

$$\Delta^{-1}(x, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^{j+1} H^j(x, x)$$

ここで $H^j(x, x)$ を見てみると、クロネッカーデルタから分かるように、リンク変数は隣り合った格子点との間しか繋いでいません。そうすると、例えば $H^2(x, x)$ では2個のリンク変数によって、 x から x に戻ってこないといけないような構造になっています。つまり、 $H^j(x, x)$ は各リンク変数の数に対応する閉じたループを形成します。このことを時間方向を中心に考えることにします。

ポリヤコフループとの対応がしりたいので、時間の出発点を t_1 、終点を N_t として、 $N_t + 1 = t_1$ となるような周期性があるとし、 $U(x, t_2)U^\dagger(x, t_2)$ のような中心対称性を持つような組み合わせは可能だが意味がないとします。そうすると、時間の始点 t_1 から出発して t_1 に戻るには、 $U_4(t_1), U_4(t_2), \dots, U_4(N_t)$ のリンク変数が必要になります (もしくは逆に進む $U_4^\dagger(t_1 - \hat{4}), U_4^\dagger(t_2 - \hat{4}), \dots, U_4^\dagger(N_t - \hat{4})$)。空間成分には周期性がないのでリンク変数とそのエルミート共役が作用しながら x から x に戻ってきます。

この動きかたから、 $\Delta^{-1}(x, x)$ は、時間 n_1 、位置 x から時間 N_t 、位置 x に到達できるあらゆるリンク変数の組み合わせ (言い換えれば、閉じたループ) を取ったものに対応するというように思えます。しかし、まだ不完全です。これでは、時間 t_1 から時間 N_t に到達したとしても、位置が x に到達していない場合が考慮されていないからです。時間が $N_t + 1 = t_1$ でも位置が x' にいたらまだ閉じたループを形成していません。このとき、単に空間成分のリンク変数だけが作用して x' から x に行かなければいけないという縛りもないので、時間も t_1 から $t_2, t_3 \dots$ へとまた動いていけます。なので、もう一度 N_t に到達することができ、 x' が x に到達するまで、何回でも t_1 から N_t に進むことができます。この t_1 から N_t に何回到達したかを n とすれば、その巻き数 n (時間方向に紐を巻いているようなイメージなので巻き数と呼びます) によって、閉じたループを区別できます。そうすると、 $\Delta^{-1}(x, x)$ は巻き数 0 のときに可能な閉じたループ + 巻き数 1 のときに可能な閉じたループ + \dots のようになるはずなので

$$\text{Tr} \Delta^{-1}(x, x) = \sum_x \text{tr} \Delta^{-1}(x, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathcal{L}_n} \kappa^{|l|+1} \text{tr} \prod_{(y, \mu) \in l} U_\mu(y)$$

このように書けます。トレースは何かしらの自由度に対してです。 \mathcal{L}_n は巻き数 n の閉じたループの集まりで、 l はその閉じたループを表し、 $|l|$ はループの長さで、 $(y, \mu) \in l$ は閉じたループ l を作る組み合わせに関して $U_\mu(y)$ の積を取れということです。

重要なことは巻き数 1 のとき、これはポリヤコフループを含んでいることです。巻き数 1 は、一度だけ t_1 から N_t に行くので、位置が x からずれずに x にいくなら、ポリヤコフループそのものになります。今の場合はポリヤコフループだけでなく、途中で位置がずれる $U_4(x, t_1)U_4(x, t_2)U_i(x, t_3)U_i^\dagger(x, t_3)U_4(x, t_4) \dots U_4(x, N_t)$ みたいなものもあります。

このままの形だと何回巻いているのかの区別ができないので、時間の端のリンク変数を

$$e^{i\phi} U_4(x, N_t)$$

と変更します。こうすれば一回巻くたびに $e^{i\phi}$ がくっつくことになるので

$$\sum_x \text{tr} \Delta_\phi^{-1}(x, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\phi n} \sum_{l \in \mathcal{L}_n} \kappa^{|l|+1} \text{tr} \prod_{(y, \mu) \in l} U_\mu(y)$$

となります。これをさらに ϕ と巻き数 q によってフーリエ変換すれば ($V = N^3 N_t$ 、 N は位置の格子数)

$$\begin{aligned} p_q &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i\phi q} \text{Tr} \Delta^{-1} = \frac{1}{V} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n, q} \sum_{l \in \mathcal{L}_n} \kappa^{|l|+1} \text{tr} \prod_{(y, \mu) \in l} U_\mu(y) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{l \in \mathcal{L}_q} \kappa^{|l|+1} \text{tr} \prod_{(y, \mu) \in l} U_\mu(y) \end{aligned}$$

となって、巻き数 q によって定義される量として書くことが出来ます。

この話の重要なことは途中で言ったように、巻き数 1 がポリヤコフープの変化版になっている点です。このため、巻き数 1 の P_1 を dressed ポリヤコフープと言います。dressed ポリヤコフープは、巻き数が 1 であるために変換 $Z(N_c)$

$$U_4(\mathbf{x}, t) \Rightarrow zU_4(\mathbf{x}, t) \quad (z = e^{i2\pi n/N_c}, n = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1)$$

に対してポリヤコフープと同じように

$$P_1 \Rightarrow zP_1$$

と変換されます。この性質から P_1 を閉じ込めのオーダパラメータとして使用することができます。

ここではラプラシアンでやってきましたが、ディラック演算子でやっても同様の格好になって、 $Z(N_c)$ に対して同じように振舞います。

というわけで、長々と説明してきましたが、ディラック演算子が (staggered フェルミオンの場合)

$$\text{tr}[(D_\phi + m)^{-1}] = \frac{1}{m} \sum_{l \in \mathcal{L}_q} \frac{s(l)e^{i\phi q}}{(2am)^{|l|}} \text{tr} \prod_{(y, \mu) \in l} U_\mu(y)$$

と書け (a は格子間隔、 $s(l)$ は各 l での符号)、これがカイラル凝縮に対応することから

$$\Sigma_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i\phi n} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_\phi$$

というのを使うことにし (無限大の連続空間なので、格子体積はなくなります)、dual quark condensate (直訳すれば双対クォーク凝縮) と呼びます。これの Σ_1 は dressed ポリヤコフープなので、中心対称性に対してポリヤコフープと同じように振舞うことから、閉じ込めのオーダパラメータにすることができます。 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\phi$ での ϕ 依存性は、格子上の時間の端で導入されたものなので、フェルミオンに対して

$$\psi(\mathbf{x}, \beta) = e^{i\phi} \psi(\mathbf{x}, 0)$$

という周期性をかすことに対応します。この周期性は有限温度でのフェルミオンの反周期性を一般化したものになっています ($\phi = \pi$ で反周期性)。

カイラル対称性の破れのオーダパラメータは $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ なので特に新しいもの導入する必要はないですし、dual quark condensate とフェルミオンの周期性を見て分かるように $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\phi=\pi}$ が通常のカイラル凝縮に対応します。

次にクォークの DS 方程式ですが論文の (7) 式を見てください。厳密なクォーク伝播関数の形は $S^{-1} = i\gamma_4 w_n C + i\gamma_i p_i A + B$ としています。(7) 式の右辺第二項のくり込み定数の塊はクォーク・グルーオン頂点のくり込み定数 Z_1 の

$$Z_1 = \frac{Z_2 \tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}$$

に対応します。 Z_2, Z_m はクォーク場と質量、 \tilde{Z}_1 はゴースト・グルーオン頂点、 \tilde{Z}_3 はゴースト場のくり込み定数です。ここでは $\tilde{Z}_1 = 1$ とし、 \tilde{Z}_3 はクォーク・グルーオン頂点の形から打ち消すようにしています。

注意点は周期的条件が $\psi(\mathbf{x}, \beta) = e^{i\phi} \psi(\mathbf{x}, 0)$ となっているために、松原振動数が

$$\omega_p(n_t, \phi) = 2\pi T(n_t + \frac{\phi}{2\pi})$$

と変更されている点です。

DS 方程式の導出はゼロ温度なら「シュウィンガー・ダイソン方程式 ~ QED ~」、有限温度なら「カイラル対称性の回復」を見てください。くり込み定数ありの場合は、「くり込み ~ QED ~」での最後のほうに QED のくり込

み定数ありでのラグランジアンがあるのでそれを見れば、なんでこんな風にくり込み定数が出てくるのかが分かります。クォーク伝播関数の表面的な構造は QED での電子伝播関数と同じなので、くり込み定数の出方は同じになります。

DS 方程式を解くためには、グルーオン伝播関数とクォーク・グルーオン頂点の情報が必要なので、それを加えます。グルーオン伝播関数には格子シミュレーションの結果を流用します。これは論文での図 1、図 2 に対応する関数形を作ってやろうというもので、式 (10) がそれです。使っている格子シミュレーションはクエンチ近似での $SU(2)$ ヤン・ミルズ理論での結果になっています (カラー N_c が 2)。

クォーク・グルーオン頂点には、Slavnov-Taylor 恒等式を満たすために ball-Chiu 型の頂点の $A\gamma_\mu/2$ を有限温度版に変更したものを使って、そこにメソンの質量とかを再現できるように作られた部分を加えています。こうして作られた C, A, B に対する方程式は appendix A に載っていて、これを解くことで厳密なクォーク伝播関数が求まります。

準備ができたので臨界温度の計算に移るんですが、その前にさらに準備がいります。この論文ではラグランジアンの段階でカレント質量を残しているために、最初からカイラル対称性は厳密に破れています。そのため、カイラル対称性の破れた相から破れていない相への変化は相転移とはいえなくなり、クロスオーバ (ポテンシャルに飛びがなくなる) となります。閉じ込めの方はカレント質量のありなしに関わらずクロスオーバになっています。

このため、オーダパラメータを見ても相が変化したことが分かりません。なので、オーダパラメータの変化の仕方を見て、それが急激に変化し最大値になる地点を相が変わった温度だとするという方法を使います。そのためにカイラル感受率 (chiral susceptibility) と呼ばれる

$$\chi = \frac{\partial}{\partial m} \langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

これを元にします。このくり込み版が (14) 式です。カレント質量による微分になっているのは、カレント質量の大きさによる相構造を調べる時に使われるものだからです (格子シミュレーションの話で必ず出てくる $m_{u,d}$ と m_s による相図)。で、今は温度なので、この類似として (15) 式を使うということです。(16) 式はクォーク伝播関数を使って、それに付随するクォーク場のくり込み定数 Z_2 がついたものです。

後は細かな数値計算上の話なので、それは飛ばして結果にいきます。結果は図 3 の右側と表 2 にまとまっていて、温度の変化に対する場合は、閉じ込めは $T = 308(2)$ (MeV)、カイラル対称性は $T = 301(2)$ (MeV) です。図 3 の左側は DS 方程式をトラス上 (空間にも周期性を課している) で計算したものです。この結果から閉じ込め相転移とカイラル相転移の臨界温度はずれていることが分かります。

さらに、この論文での売りは、カイラル極限を計算したら、閉じ込め相転移は $T = 299(3)$ (MeV)、カイラル相転移は $T = 298(1)$ (MeV) となって誤差範囲内で一致した結果が得られた点です。つまり、2 つのずれを作っているのはクォークのカレント質量なのじゃないかという予想が立てられたこととなります。しかし、なんでカレント質量がきいているのかは分かっていないようです。

論文内で、カレント極限を取ったときについてにしている話もおきます (IV.B と図 4 の左側)。カレント質量が大きければ、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\phi$ は

$$\Delta(\phi) = \sum_{n=0} a \cos(n\pi)$$

で ϕ 依存性を近似できます ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\phi$ は全ての巻き数のループを持っている)。これは (2) 式の $e^{i\phi n}$ から予想できることです。また、ループの長さが長いほど $1/m$ がかかってくるために m が大きいときにはただのポリヤコフループに近似できることは、質量が大きいときは $\cos(n\phi)$ の n が小さくても十分近似できることに対応します。質量を下げていくと、 $\phi = \pi$ 周辺で平坦になってきますが、 $a \cos(n\pi)$ ($n > 1$) の寄与を加えていくことで近似できます。なので、巻き数の多いループからの寄与が効いてくることに対応します。しかし $m = 0$ の極限では、より平坦になり $\phi = \pi \pm L$ で微分が非連続になるようです (L は平坦域の長さの半分)。これは (2) が $m = 0$ では有効でないことを示すこととなります。

カイラル相転移温度の ϕ 依存性も示しています。 $\phi = 0, 2\pi$ ではカイラル凝縮が温度の増加によって増加していきます (図 4 の右側)。